

Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2015)

26. Пусть f - изоморфизм объекта X на объект-произведение $A \times B$. Докажите, что $(X, f \cdot p_A, f \cdot p_B)$ - произведение A и B .
27. В категории с произведениями и суммами постройте функторы $A \times -$, $A + -$, такие что для любого объекта X
 $(A \times -)(X) = A \times X$, $(A + -)(X) = A + X$.
28. Докажите, что CAT - категория с конечными произведениями и суммами.
29. Докажите, что в категории абелевых групп ABGR прямая сумма групп является их произведением и суммой.
30. Докажите, что в категории MON моноидов для любого семейства объектов существует произведение.
31. Докажите, что если $C = A + B$ в категории колец RING , то $C_+ \cong A_+ \oplus B_+$ ($+$ обозначает аддитивную группу).
32. а) Постройте неизоморфные кольца с аддитивной группой $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
б) Докажите, что в RING не существует суммы двухэлементных полей.
33. Опишите уравнители в категориях GROUP , ABGR , RING .
34. Существуют ли уравнители в категории MON ?
35. Определите понятие коуравнителя в категории как двойственного к понятию уравнителя. Докажите, что SET - категория с коуравнителями.
36. Докажите, что MON - категория с коуравнителями.
37. Докажите, что все пределы одной диаграммы изоморфны как объекты.
38. Что можно сказать о произведении, если один из сомножителей
а) финальный объект ?
б) начальный объект ?
39. Докажите, что если категория \mathcal{J} имеет начальный объект, то любая диаграмма вида $\mathbf{D}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ имеет предел.