

Алгебра, семинар 5: линейная алгебра

1. (Напоминание) Найдите ранг матриц

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (Напоминание) **a)** Сколько существует матриц 2×3 рангов 0, 1 и 2 над полем из q элементов? **b)** Тот же вопрос для матриц 3×3 .

3. Перемножьте в каждом из двух возможных порядков матрицы

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & b & b^2/2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Возведите в 2015-ю степень матрицы **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. **a)** Докажите, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, по сложению и умножению образуют поле, изоморфное \mathbb{C} . **b)** Найдите $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$.

c) Придумайте недиагональную матрицу, куб которой равен $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Для каждой пары чисел k и $m \in \{0, 1, 2\}$ ответьте на вопрос: если ранги 2×2 матриц A и B равны k и m соответственно, то **a)** чему может и чему не может быть равен ранг произведения AB , и обязательно ли совпадает с рангом BA ? **b)** Чему может и чему не может быть равен ранг блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ A & 2B \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$? **c)** Первый вопрос в случае матриц 3×3 .

7. Докажите, что каждая матрица $n \times n$ ранга r представима в виде

a) произведения матриц $n \times r$ и $r \times n$ и **b)** суммы r матриц ранга 1.

c) Найдите такие разложения матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & a \end{pmatrix}$ для каждого значения a .