

Алгебра, семинар 4: линейная алгебра

1. (Напоминание) В пространстве многочленов одной переменной степени ≤ 2 найдите базис, в котором координатами любого многочлена f являются числа **a)** $f(0), f(1), f(2)$; **b)** $f(0), f'(0), f(1)$.
2. (Напоминание) Найдите базис \mathbb{Q} -векторного пространства $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
3. Найдите образ и прообраз плоскости $x + y + z = 0$ и прямой, порожденной вектором $(1, 1, 1)$, при линейном отображении $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданном в стандартном базисе матрицей **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Докажите, что ядро и образ каждого линейного оператора – векторные подпространства.
5. Придумайте линейное отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, у которого **a)** образ порожден вектором $(1, 2, 3)$, а ядро – плоскость $x + 2y + 3z = 0$ **b)** ядро порождено вектором $(1, 2, 3)$, а образ – плоскость $x + 2y + 3z = 0$.
6. **a)** Найдите ядро, образ и ранг оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени $\leq k$. **b)** То же для оператора, переводящего каждый многочлен f степени $\leq k$ в его симметризацию $f(x) + f(-x)$. **c)** Найдите матрицу оператора дифференцирования в базисах первых двух пунктов задачи 1.
7. Найдите матрицу оператора умножения на $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ в базисе задачи 2.
8. Найдите ранг матриц **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
9. **a)** Сколько существует матриц 2×3 рангов 0, 1 и 2 над полем из q элементов? **b)** Тот же вопрос для матриц 3×3 .