

Алгебра, семинар 6: линейная алгебра

1. Вычислите определители:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 2 \\ -1 & -a & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Вычислите определитель матрицы размера $n \times n$ с компонентами

$$\text{a) } a_{i,j} = \min(i, j) \quad \text{b) } a_{i,j} = \max(i, j) \quad \text{c) } a_{i,j} = |i - j| + 1.$$

3. Найдите неизвестную v из системы уравнений

$$\begin{cases} y + 2z & = a \\ -x + 3z & = b \\ -2x - 3y + 4v & = c \\ -4z + 5v & = d \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ \vdots \\ x_{98} + 2x_{99} + x_{100} = 0 \\ x_{99} + 2x_{100} = 0 \end{cases}$$

5. Найдите матрицы, обратные к матрицам **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) к матрицам задачи 1.

6. Сколько из нулей и единиц можно составить матриц **a)** размера 4×4 с нечетным определителем? **b)** размера 3×3 с единичным определителем?