Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 1

Определение категории

Для строгого изложения теории категорий нужна формализация теории множеств, где используются множества и классы. Наиболее известная система аксиом этого типа — аксиоматика Гёделя — Бернайса (см. напр. книгу Фейса «Алгебра» из списка литературы).

<u>Определение</u>. *Предкатегория* (*диаграммная схема*) состоит из 2 классов: *вершин* (*объектов*) и *стрелок* (*морфизмов*). Для каждой стрелки заданы ее *начало* и *конец*.

Для предкатегории $\mathscr{C}$: $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ обозначает класс всех объектов, $\mathrm{Mor}\mathscr{C}$ - класс всех морфизмов

$\mathscr{C}(A,B)$ или $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ обозначает класс всех стрелок в $\mathscr{C}$ с началом A и концом B.

Запись $\alpha\colon X \to Y$ обозначает, что – стрелка с началом X и концом Y (в рассматриваемой предкатегории)

<u>Определение</u>. *Категория* — это предкатегория, в которой:

для каждого объекта A, задана *тождественная стрелка* 1_A (или id_A);

для каждой пары последовательных стрелок α, β (т. е. конец α = началу β) задана их *композиция* $\alpha\cdot\beta$, причем выполнены следующие условия («аксиомы категорий»):

(1) $1_X\colon X \to X$

(2) Если $\alpha\colon X \to Y$, $\beta\colon Y \to Z$, то $\alpha\cdot\beta\colon X \to Z$.

(3) $\alpha\cdot 1_Y = 1_X\cdot\alpha = \alpha$, если $\alpha\colon X \to Y$.

(4) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$, если α, β, γ - последовательные стрелки.

Пример 1. Пустая категория: нет ни объектов, ни морфизмов

Пример 2. Категория множеств SET. Объекты — множества, стрелки — функции (отображения).

(Пред)категория называется *малой*, если ее стрелки (а значит, и объекты) составляют множество; *локально малой*, если стрелки между любыми 2 объектами составляют множество. SET — локально малая, но большая.

Пример 3. Категория конечных множеств FINSET.

Пример 4. Дискретные категории, в которых все стрелки тождественны (пустая категория тоже дискретна).

Пример 5 (нестрогий). Объекты – типы данных, морфизмы — программы. (Все это надо точно определять.)

Лемма 1 («однозначность тождественной стрелки»)

Если $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha=\alpha$, для всех $\alpha\colon X\to X$, то $\beta=1_X$.

Двойственные категории

Определение. Для категории $\mathscr{C}$ *двойственная категория* $\mathscr{C}^{\circ}$ получается переворачиванием стрелок.

Формально: объекты и морфизмы в $\mathscr{C}^{\circ}$ - те же, что в $\mathscr{C}$, но при этом

$\mathscr{C}^{\circ}(A,B)=\mathscr{C}(B,A)$;

тождественные стрелки не меняются;

композиция берется в обратном порядке, т. е. $\alpha\cdot\beta$ (в $\mathscr{C}^{\circ}$) $=\beta\cdot\alpha$ (в $\mathscr{C}$).

Достаточно очевидно, что $\mathscr{C}^{\circ}$ - действительно категория и совсем очевидно, что

$\mathscr{C}^{\circ\circ}=\mathscr{C}$.

Подкатегории

Определение. $\mathscr{C}$ - *подкатегория* $\mathscr{D}$, если

$\mathrm{Ob}\mathscr{C}\subset\mathrm{Ob}\mathscr{D}$

$\mathrm{Mor}\mathscr{C}\subset\mathrm{Mor}\mathscr{D}$

1_A (в $\mathscr{C}$) $=1_A$ (в $\mathscr{D}$) для объекта A из $\mathscr{C}$

$\alpha\cdot\beta$ (в $\mathscr{C}$) $=\alpha\cdot\beta$ (в $\mathscr{D}$) для морфизмов α, β из $\mathscr{C}$

Если при этом $\mathscr{C}(A,B)=\mathscr{D}(A,B)$ для любых A,B из $\mathscr{C}$, то подкатегория $\mathscr{C}$ называется *полной.*

Изоморфизмы

Определение. Стрелка $\beta\colon Y\to X$ называется *обратной* к стрелке $\alpha\colon X\to Y$, если $\alpha\cdot\beta=1_X$ и $\beta\cdot\alpha=1_Y$.

Стрелка, у которой есть обратная, называется *изострелкой (изоморфизмом)*.

Лемма 2. Если обратная стрелка существует, то она единственна.

Обозначение обратной стрелки: α^{-1}.

Лемма 3. Композиция изострелок – изострелка; при этом

$(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$.

Определение. Объект X *изоморфен* объекту Y (в данной категории), если существует изоморфизм $X \to Y$.

Предложение 4. Изоморфность является отношением эквивалентности на объектах категории.

Начальные и финальные объекты

Определение. Объект A называется *начальным (инициальным)* в данной категории, если из него в любой объект исходит единственная стрелка.
Объект A называется *финальным (терминальным)* в данной категории, если из любого объекта в A исходит единственная стрелка.

Лемма 5. (1) Все начальные объекты категории изоморфны;

(2) все финальные объекты категории изоморфны;

(3) начальные объекты в $\mathscr{C}^{\circ}$ - это финальные объекты в $\mathscr{C}$.