

1. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА. ЛИСТОК 3. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Обязательные задачи: 1а-в, 2, 3, 4, 5, 6а, 9. Срок сдачи - 3 ноября.

Сдавшие 27 октября обязательные задачи из листков 1-3 получают зачет за первый модуль автоматически.

1. Покажите, что следующие функции стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

а) $\frac{1}{2\varepsilon}\chi_{-\varepsilon,\varepsilon}$, где $\chi_{-\varepsilon,\varepsilon}$ – характеристическая функция интервала $[-\varepsilon, \varepsilon]$;

б) $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/4\varepsilon}$; г) $\frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Какие из них задают δ -образные последовательности?

2. Вычислите следующие обобщенные функции как функционалы на основных:

а) $(|x+1| + |x-1|)''$; б) $[x]$; в) $x^k \delta^{(l)}(x)$, где $k = 0, 1, 2$, $l \geq 0$; г) $\left(\frac{1}{x}\right)'$.

Здесь $[x]$ – целая часть x – наибольшее целое число, не превосходящее x , а $1/x$ понимается в смысле главного значения.

3. Покажите, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(x-k)$ сходится в \mathcal{D}' для любых $a_k \in \mathbb{C}$

4. а) Опишите все решения уравнения $y'(x) = 0$ в обобщенных функциях.

 б) Опишите все решения уравнения $xy(x) = 0$ в обобщенных функциях.

5. Покажите, что функция $\ln|x|$ локально интегрируема на вещественной прямой. Найдите ее производную в классе обобщенных функций.

6. Покажите, что обобщенная функция $\delta(x)$ не может быть представлена никакой локально интегрируемой на прямой функцией.

7. Обобщенная функция $1/x^3$ определена соотношением

$$\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right),$$

где $1/x^2$ также обобщенная функция (см. задачу 2г). Найдите явное выражение для действия $1/x^3$ на основную функцию.