Листок 03. Срок сдачи 23 октября 2015

Для сдачи каждой из задач 3.1 — 3.6 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

03.01. Число e.
а) Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ограниченная возрастающая;

б) Докажите, что $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$; в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$;

г) Докажите, что $e - y_n \leqslant \dfrac{1}{n!\,n}$; д) Докажите, что e — иррациональное число.

03.02.
а) Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e, \quad x\in\mathbb{R}$; б) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x\in\mathbb{R}$;

в) Докажите, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$; г) Докажите, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

д) Докажите, что $(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

03.03. Формула Лагранжа. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и непрерывно дифференцируема на (a,b).

а) Докажите, что f удовлетворяет условию Липшица на каждом промежутке $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$: $\forall\, x,y\in[\alpha,\beta]$ при некотором K справедлива оценка $|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$;

б) Всегда ли можно выбрать общее для всех промежутков $[\alpha,\beta]$ значение K?

в) Приведите пример f, которая не удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a,b]$;

г) Пусть f не является линейной функцией ($f(x)\not\equiv kx+b$). Докажите, что найдется $\xi\in[a,b]$ такое, что $|f'(\xi)(b-a)| > |f(b)-f(a)|$;

д) Верно ли, что для каждого $\xi\in(a,b)$ найдутся такие $x_1,x_2\in[a,b]$, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)?$$

е) Пусть функция f определена и дифференцируема n раз на $[0,1]$. Пусть существуют такие точки $0<x_0<x_1<\ldots<x_n<1$, что $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$. Докажите, что существует такая точка $x^*\in[0,1]$, что $f^{(n)}(x^*)=0$.

03.04. Компактность.
а) Придумайте открытые покрытия интервала $(0,1)$ и луча $[0,\infty)$, не имеющие конечных подпокрытий;

б) Докажите, что любая последовательность точек отрезка содержит сходящуюся подпоследовательность;

в) Докажите, что из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие;

г) Пусть подмножество прямой X обладает тем свойством, что из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что X замкнуто и ограничено;

д) Пусть подмножество прямой X обладает тем свойством, что из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что любая последовательность точек множества X содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой лежит в X.

03.05. Монотонные функции. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонная функция.

а) Докажите, что в любой точке x_0 существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

б) Докажите, что множество точек разрыва f не более чем счётно;

в) Множество значений функции f является отрезком (либо $[f(a), f(b)]$, либо $[f(b), f(a)]$), если и только если функция f непрерывна на $[a,b]$;

г) Строго монотонная f является биекцией отрезков, если и только если она непрерывна.

03.06.

а) Докажите, что множество точек отрезка несчетное;

б) Придумайте последовательность вложенных интервалов с пустым пересечением;

в) Докажите, что точная верхняя грань ограниченного множества A совпадает с точной нижней гранью множества верхних граней множества A.

03.07.* Докажите, что функция Римана, принимающая значение 0 в иррациональных точках отрезка и значения q^{-1} в рациональных точках отрезка вида p/q (это несократимая дробь), непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных.

03.08.* а) Дано множество отрезков на прямой, причем любые два из них имеют общую точку. Верно ли, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам?

б) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат? (Прямоугольники рассматриваются вместе с внутренностью.)

в) Верно ли это для произвольных прямоугольников на плоскости?

г) Верно ли данное утверждение для произвольных прямоугольников на плоскости, если любые три из них имеют непустое пресечение?

03.09.* Докажите, что на экваторе найдутся две противоположные точки с одинаковой температурой.

03.010.* Пусть подмножество прямой X обладает тем свойством, что любая последовательность точек множества X содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой лежит в X. Докажите, что из любого открытого покрытия множества X можно выбрать конечное подпокрытие.