

# Теория струн и конформная теория поля.

## Контрольная работа 1.

1. Найдите действие  $S(x_0, x_1; t)$  для нерелятивистской свободной частицы с лагранжианом  $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2$  при движении по классической траектории от  $x_0$  до  $x_1$  за время  $t$ . Как это действие связано с матричным элементом оператора эволюции  $\langle x_1 | \exp(-\frac{i}{\hbar} H t) | x_0 \rangle$ ?
2. Выведите уравнения движения точечной релятивистской частицы в произвольной пространственно-временной метрике  $G_{\mu\nu}(X)$ :

$$S[X; e] = \frac{1}{2} \int d\tau \left( e^{-1} G_{\mu\nu}(X) \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} + m^2 e \right)$$

3. Для конформной метрики в двумерном евклидовом пространстве  $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma_1, \sigma_2) \delta_{\alpha\beta}$  вычислить тензор Риччи  $R_{\alpha\beta}$  и скалярную кривизну  $R$ . Для каких функций  $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$  эта метрика является решением уравнений Эйнштейна-Гильберта  $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0$  в двумерном пространстве без материи?
4. Пусть  $A$  - положительно определенная матрица размера  $n \times n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим

$$\langle f(x) \rangle := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} dx}$$

- а) Вычислить гауссов интеграл  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} dx$  и величины  $\langle x_i \rangle$ ,  $\langle x_i x_j \rangle$ .
  - б) Пусть  $n = 3$ : вычислить  $\langle x_1^2 x_2 x_3 \rangle$ .
5. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет пропагатор свободной релятивистской частицы

$$\mathcal{K}(X) = \int_0^\infty dT \frac{e^{-\frac{|X|^2}{2T} - \frac{m^2}{2} T}}{T^{D/2}}$$

Найти решение этого уравнения в виде интеграла Фурье.

6. (\*) Вычислить выражение  $J_\mu(X_0, X_1; x) = \langle \int_0^1 d\tau \dot{X}_\mu(\tau) \delta(x - X(\tau)) \rangle_{X, e}$  в теории релятивистской частицы (имеется в виду полный интеграл по всем полям -  $X$  и  $e$ ). Какой физический смысл у полученного ответа?