1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл Полякова

3.1 Интеграл для струны Полякова

В двумерном случае, для струны Полякова по аналогии мы должны написать

$$\mathcal{F} = \int DgDX \exp(-S[X,g]) \tag{3.1}$$

где действие струны

$$S[X,g] = \tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \int_\Sigma d^2\sigma \left(\mu_0^2 \sqrt{g} + Q_0 R^{(2)} \sqrt{g} \right) \tag{3.2}$$

вообще говоря уже содержит *квантовые* слагаемые:

- Член $\mu_0^2 \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g}$ нужен для перенормировки возникающих расходимостей из при регуляризации детерминанта флуктуаций полей X - полный аналог перенормировки массы частицы. Он очевидно неинвариантен относительно преобразований вейлевской симметрии классического действия.

- Вклад $Q_0 \int_\Sigma d^2\sigma R^{(2)} \sqrt{g} = 4\pi Q_0 \chi(\Sigma) = 8\pi Q_0 (1-p)$ выражается через эйлерову характеристику поверхности $\Sigma = \Sigma_p$ (в теории замкнутых струн, для мировых листов без границ). Тогда этот вклад

  $$e^{-Q_0 \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} R^{(2)}} = e^{8\pi Q_0 (p-1)} \equiv g_{\rm str}^{2p-2} \tag{3.3}$$

  можно интерпретировать как струнную константу связи, считающую вклады струнных петель - топологий мировых листов, т.е. вообще говоря

  $$\mathcal{F} = \sum_{p \geq 0} g_{\rm str}^{2p-2} \int_{\Sigma_p} DgDX \exp(-S[X,g]) \tag{3.4}$$

  сумма по связным диаграммам всех топологий определяет *свободную энергию* бозонной струны.

Заметим отдельно, что если меры интегрирования определять по репараметризационно-инвариантным нормам

$$\|\delta X\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} (\delta X)^2 \tag{3.5}$$

для полей-координат и

$$\|\delta g\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}\delta g_{\alpha\beta}\delta g_{\alpha'\beta'} + C(g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta})^2\right) \tag{3.6}$$

для двумерной метрики, то эти меры также очевидно вейлевски неинвариантны.

Таким образом, для изучения континуального интеграла Полякова надо сначала понять, как все введенные величины зависят от конформного фактора.

3.2 Элементы двумерной римановой геометрии

Параллельный перенос векторного поля $V = V^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ на произвольном многообразии $\mathcal{M}$ вдоль кривой (траектории) $x^\mu = x^\mu(s)$ с касательным вектором (4-скоростью) $\xi^\mu = dx^\mu/ds$:

$$\frac{dV^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\nu\xi^\lambda = 0 \tag{3.7}$$

где $\{\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\}$ - пока абы какие (не связанные с метрикой, вообще говоря *не* симметричные по нижним индексам) компоненты *связности*, задающей структуру параллельности. Уравнение (3.7) можно переписать в виде

$$\xi^\lambda\nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{ds}\nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{ds}\left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\nu\right) = 0 \tag{3.8}$$

где

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}V^\nu \equiv V^\mu_{;\lambda} \tag{3.9}$$

будем называть ковариантной производной, а его (однозначное!) решение с начальным условием $x^\mu(0) = x^\mu_P$ определяет параллельный перенос вектора из точки P вдоль траектории $\{x^\mu(s) : x^\mu(0) = x^\mu_P\}$.

- Легко обобщается на (p,q)-ю тензорную степень (ко)касательного расслоения $\mathcal{T}_{(p,q)} = (T\mathcal{M})^{\otimes p}\otimes(T^*\mathcal{M})^{\otimes q}$: - оператор ковариантного дифференцирования $\nabla : \mathcal{T}_{(p,q)} \to \mathcal{T}_{(p,q+1)}$ (ковариантная производная преобразуется как тензор - в отличие, вообще говоря, от обычной производной!). За исключением скаляра, для которого $\Phi \in \mathcal{T}_{(0,0)}$: $\nabla\Phi \in \mathcal{T}_{(0,1)}$ и $\nabla_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi$. Взяв в качестве скалярной функции $\Phi = V^\mu A_\mu = \iota_V(A)$ и пользуясь

  $$\nabla_\lambda(V^\mu A_\mu) = (\nabla_\lambda V^\mu)A_\mu + V^\mu\nabla_\lambda(A_\mu) = \partial_\lambda(V^\mu A_\mu) \tag{3.10}$$

  легко увидеть, что из (3.9), (3.10) следует

  $$\nabla_\lambda A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}A_\nu \tag{3.11}$$

  правило ковариантного дифференцирования компонент дифференциальной формы;

- Преобразование связности (следует из ковариантности уравнений (3.7))

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(x')\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}} + \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}} \tag{3.12}$$

неоднородно. Например, в плоском пространстве Минковского в декартовой системе координат $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$, а в криволинейных координатах вообще говоря $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \neq 0$.

Однако, тензор кручения $(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})$ - преобразуется однородно. Принято считать (эксперимент?), что для любого разумного пространства-времени

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = 0 \tag{3.13}$$

Связность, согласованная с метрикой. Пусть метрика не меняется при параллельном переносе, т.е.

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0 \tag{3.14}$$

При отсутствии кручения $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, используя это уравнение (написав его 3 раза циклически переставляя индексы), легко получить формулу

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2} g^{\nu\rho}\left(\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda}\right) \tag{3.15}$$

для коэффициентов такой связности или символов Кристоффеля.

Тензор кривизны. Вычислим коммутатор ковариантных производных в гравитации. Для примера рассмотрим действие оператора ковариантного дифференцирования на 1-форму: $A_{\mu;\lambda} = \nabla_{\lambda} A_{\mu}$. Тогда

$$\begin{gathered} A_{\mu;\lambda} = \nabla_{\lambda} A_{\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu} \\ A_{\mu;\lambda;\rho} = \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda} A_{\mu} = \partial_{\rho}\left(\nabla_{\lambda} A_{\mu}\right) - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\nabla_{\lambda} A_{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\nabla_{\nu} A_{\mu} \end{gathered} \tag{3.16}$$

и

$$A_{\mu;\lambda;\rho} - A_{\mu;\rho;\lambda} = \partial_{\rho}\left(\nabla_{\lambda} A_{\mu}\right) - \partial_{\lambda}\left(\nabla_{\rho} A_{\mu}\right) + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\nabla_{\rho} A_{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\nabla_{\lambda} A_{\nu} \tag{3.17}$$

т.к. последний член в правой части (3.16) сокращается при антисимметризации из-за симметричности символов Кристоффеля. Далее

$$\begin{gathered} A_{\mu;\lambda;\rho} - A_{\mu;\rho;\lambda} = \\ = \partial_{\rho}\left(\partial_{\lambda} A_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu}\right) - \partial_{\lambda}\left(\partial_{\rho} A_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} A_{\nu}\right) + \\ + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\left(\partial_{\rho} A_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} A_{\sigma}\right) - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\left(\partial_{\lambda} A_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} A_{\sigma}\right) = \\ = \partial_{\lambda}\left(\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} A_{\nu}\right) - \partial_{\rho}\left(\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu}\right) + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\partial_{\rho} A_{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\partial_{\lambda} A_{\nu} + \\ + \left(\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\right) A_{\sigma} = R^{\sigma}{}_{\mu\lambda\rho} A_{\sigma} \end{gathered} \tag{3.18}$$

т.е. $[\nabla_\rho, \nabla_\lambda]A_\mu = R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho}A_\sigma$ где

$$R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} \tag{3.19}$$

называется тензором кривизны Римана(-Кристоффеля).

Отметим некоторые свойства тензора кривизны:

- Очевидно, что $R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} = -R^\sigma{}_{\mu\rho\lambda}$. Введем $R_{\nu\mu\lambda\rho} = g_{\nu\sigma}R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho}$. Тогда

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho}, \qquad R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} \\ R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu} \end{gathered} \tag{3.20}$$

  Кроме того, любая циклическая сумма по 3-м индексам зануляется, например

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\mu\rho\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\rho\nu} = 0 \tag{3.21}$$

- Всегда выполняется тождество(а) Бианки

$$\nabla_\nu R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} + \nabla_\rho R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} + \nabla_\lambda R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} = 0 \tag{3.22}$$

- Можно, конечно, рассмотреть действие коммутатора $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ и в других расслоениях - формулы будут аналогичны, например

$$\begin{gathered} V^\lambda{}_{;\mu;\nu} - V^\lambda{}_{;\nu;\mu} = -V^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \\ B_{\lambda\rho;\mu;\nu} - B_{\lambda\rho;\nu;\mu} = B_{\sigma\rho}R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} + B_{\lambda\sigma}R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} \end{gathered} \tag{3.23}$$

  и т.д. Первое из этих уравнений эквивалентно утверждению, что в кривом пространстве параллельный перенос вектора, вообще говоря, зависит от выбора пути.

- Удобно ввести симметричный тензор Риччи и скалярную кривизну

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = g^{\lambda\rho}R_{\lambda\mu\rho\nu} \\ R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \end{gathered} \tag{3.24}$$

  Заметим, что в плоском пространстве *все* компоненты тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$, что отнюдь не сводится к $R = 0$ (одно уравнение) или $R_{\mu\nu} = 0$ (риччи-плоские пространства: 10 уравнений в 4-мерии, а у тензора кривизны 20 независимых компонент).

Исключения составляют пространства малой размерности:

- Одномерное пространство всегда плоское: $e(\tau)d\tau = ds$ всегда можно сделать постоянной выбором координат;

- В двумерном пространстве существует единственная нетривиальная компонента у $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, поэтому все выражается через саму метрику и скалярную кривизну $R = R^{(2)}$, например тензор Риччи

$$R_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \qquad \mu,\nu = 1,2 \tag{3.25}$$

  В частности это означает, что в двумерии

$$\delta \int d^2\sigma \sqrt{g} R \sim \delta \int d^2\sigma \sqrt{g}\ \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \equiv 0 \tag{3.26}$$

  вариация действия Гильберта обращается в нуль тождественно, что в частности означает, что $\int d^2\sigma\sqrt{g}R$ не зависит от локальных изменений метрики и представляет собой топологический инвариант.

- В трехмерном пространстве $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ выражается через тензор Риччи $R_{\mu\nu}$. В частности, любое трехмерное риччи-плоское пространство является плоским.

3.3 Конформная аномалия

Будем считать, что репараметризационная инвариантность сохраняется при квантовании. Иначе нельзя - никакая разумная квантовая теория не может зависеть от выбора координат на ненаблюдаемом мировом листе Σ. Так обстоит дело с определенной частью симметрий - кажется неразумным считать, что будучи симметриями классической теории они вдруг станут нарушаться в квантовой (калибровочная симметрия, Лоренц-Пуанкаре итп). С другой стороны, часть симметрий может нарушаться при квантовании “естественным образом”. К таким относится, например, масштабная инвариантность. Хорошо известно, что, например, в асимптотически-свободной безмассовой КХД или глюодинамике, масштабно-инвариантной на классическом уровне, в квантовой теории возникает размерный параметр (размерная трансмутация) - размер адронов.

Вейлевскую симметрию[1] $g_{\alpha\beta} \to \Lambda(\sigma) g_{\alpha\beta}$ в двумерии можно считать “локализацией” масштабной инвариантности. В простейшем случае теории на сфере заменой координат метрику всегда можно привести к виду

$$ds^2 = \rho(z,\bar z) dz d\bar z = \rho(\sigma_1,\sigma_2)(d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2) \tag{3.27}$$

и вейлевская симметрия превращается в (мультипликативный) сдвиг конформного фактора $\rho(z,\bar z) \to \Lambda(z,\bar z)\rho(z,\bar z)$. Для классического действия, инвариантного относительно этой симметрии, мы просто получим $S = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu$, но результат гауссова интегрирования

$$\int DX \exp\left(-\tfrac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu \right) = \int DX e^{-\frac{1}{2}(X,\Delta_0 X)} = (\det \Delta_0)^{-D/2} \tag{3.28}$$

[1] Часто неточно называемую конформной, хотя термины “конформная” и “вейлевская” аномалия по-видимому идентичны.

выражается через детерминант зависящего от конформного фактора оператора

$$\Delta_0[\rho] = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\Big|_{g_{\alpha\beta}=\rho\delta_{\alpha\beta}} = -\rho^{-1}\partial_\alpha\partial_\alpha \tag{3.29}$$

пропорционального оператору Лапласа в плоской метрике.

Зависимость детерминанта этого оператора от конформного фактора описывается формулой

$$-\frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}\log\det\Delta_0 = g^{\alpha\beta}\langle t_{\alpha\beta}\rangle = a_0 R + b_0 \tag{3.30}$$

где в конформной калибровке $R = -\frac{1}{2}\rho^{-1}\partial^\alpha\partial_\alpha\log\rho$, а вычисление коэффициентов a_0 и b_0 (равных нулю в классической теории) является одной из задач конформной теории поля - в данном случае - теории свободных двумерных безмассовых скалярных полей.

Почему формула (3.30) имеет именно такой вид? Конечно этот результат можно получать прямым вычислением, но он очевиден и из общих соображений:

- $g^{\alpha\beta}\langle t_{\alpha\beta}\rangle$ - квантовое среднее от скалярного оператора, которое может зависеть от единственной скалярной характеристики метрики, которой является скалярная кривизна. Таким образом, в правой части (3.30) стоит функция от кривизны, и уточненное утверждение состоит в том, что эта функция линейна.

- Проведем размерный анализ. В теории струн есть разные способы приписывать размерности переменным, но сейчас воспользуемся двумерной интерпретацией. Для квадратичного действия на мировом листе естественно считать, что все поля: скаляры X и метрика $g_{\alpha\beta}$ - безразмерны, а координаты σ имеют размерность длины. Тогда тензор энергии импульса - оператор размерности 2 (две производные), и функция должна быть размерности 2. Это, в частности означает, что константа b_0 - размерности 2, а a_0 - безразмерна.

  Константы могут зависеть только от обрезания $ds^2 = g_{\alpha\beta}d\sigma^\alpha d\sigma^\beta > \epsilon \to 0$, если мы выбираем его как обрезание малых расстояний. Тогда функция кривизны будет иметь разложение

  $$f(R) = \frac{B_0}{\epsilon} + a_0 R + \sum_{n>0}\epsilon^n C_n R^n$$

  т.е. $b_0 = \frac{B_0}{\epsilon}$ - расходящаяся при $\epsilon \to 0$ константа. Мы уже встречались с этим эффектом для частицы, где он приводил к перенормировке массы $m^2\int e(t)dt$, то же самое и в двумерии - эта расходимость поглощается перенормировкой размерной космологической постоянной $\mu^2\int d^2\sigma\sqrt{g}$. А сумма по положительным степеням обрезания исчезает при $\epsilon \to 0$, приводя к формуле (3.30).

3.4 Мера интегрирования по двумерным метрикам

Аналогично одномерному случаю введем координаты в пространстве двумерных метрик с помощью инфинитезимальной вариации ($\nabla_\alpha \varepsilon_\beta = \partial_\alpha \varepsilon_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\varepsilon_\gamma$ - ковариантная производная, $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$), рассмотрев вариацию в окрестности $g_{\alpha\beta} = \rho\delta_{\alpha\beta}$

$$\begin{gathered}\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \varepsilon_\beta + \nabla_\beta \varepsilon_\alpha + g_{\alpha\beta}\delta\varphi = \nabla_\alpha \varepsilon_\beta + \nabla_\beta \varepsilon_\alpha - g_{\alpha\beta}\nabla^\gamma \varepsilon_\gamma + (\delta\varphi + \nabla^\gamma \varepsilon_\gamma) g_{\alpha\beta} = \\ = (L\cdot\varepsilon)_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\delta\tilde{\varphi}\end{gathered} \tag{3.31}$$

где для удобства введены

$$\rho = e^\varphi, \quad \delta\rho = \rho\delta\varphi \tag{3.32}$$

Подстановка этого разложения в инвариантную норму (3.6) дает

$$\|\delta g\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}(L\cdot\varepsilon)_{\alpha\beta}(L\cdot\varepsilon)_{\alpha'\beta'} + 2(1+2C)(\delta\tilde{\varphi})^2\right) \tag{3.33}$$

Оператор

$$(L\cdot\varepsilon)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \varepsilon_\beta + \nabla_\beta \varepsilon_\alpha - g_{\alpha\beta}\nabla^\gamma \varepsilon_\gamma \tag{3.34}$$

действует из пространства векторных полей $\delta\sigma^\alpha = \varepsilon^\alpha(\sigma)$ на поверхности Σ в пространство симметричных бесследовых тензоров второго ранга. В конформной метрике $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma)\delta_{\alpha\beta}$ в комплексных координатах $ds^2 = \rho(z,\bar{z})dzd\bar{z}$

$$g_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{2}\rho, \quad g^{z\bar{z}} = 2\rho^{-1}, \quad \Gamma^z_{zz} = \partial_z \log\rho, \quad \Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\log\rho, \quad R = -2\rho^{-1}\partial_z\partial_{\bar{z}}\log\rho \tag{3.35}$$

ковариантные производные для векторных полей $\varepsilon_z = \frac{1}{2}\rho\varepsilon^{\bar{z}} = \frac{1}{2}\rho\bar{\varepsilon}$, $\varepsilon_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\rho\varepsilon^z = \frac{1}{2}\rho\varepsilon$ имеют вид:

$$\begin{gathered}\nabla_z\varepsilon = \rho^{-1}\partial_z(\rho\varepsilon), \qquad \nabla_{\bar{z}}\varepsilon = \partial_{\bar{z}}\varepsilon \\ (L\cdot\varepsilon)_{zz} = 2\nabla_z\varepsilon_z = \rho\partial\bar{\varepsilon}, \quad (L\cdot\varepsilon)_{\bar{z}\bar{z}} = 2\nabla_{\bar{z}}\varepsilon_{\bar{z}} = \rho\bar{\partial}\varepsilon \\ (L\cdot\varepsilon)^{zz} = g^{z\bar{z}}g^{z\bar{z}}(L\cdot\varepsilon)_{\bar{z}\bar{z}} = 4\rho^{-1}\bar{\partial}\varepsilon, \quad (L\cdot\varepsilon)^{\bar{z}\bar{z}} = g^{z\bar{z}}g^{z\bar{z}}(L\cdot\varepsilon)_{zz} = 4\rho^{-1}\partial\bar{\varepsilon}\end{gathered} \tag{3.36}$$

а квадратичная по векторным полям комбинация в выражении для нормы превращается в

$$\begin{gathered}\frac{1}{8}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}(L\cdot\varepsilon)_{\alpha\beta}(L\cdot\varepsilon)_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{4}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}(L\cdot\varepsilon)_{zz}(L\cdot\varepsilon)_{\bar{z}\bar{z}}g^{z\bar{z}}g^{z\bar{z}} = \\ = \int_\Sigma d^2\sigma\rho\partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varepsilon = \int_\Sigma d^2\sigma\rho^2\bar{\varepsilon}\left(-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial}\right)\varepsilon = (\bar{\varepsilon},\Delta_{-1}\varepsilon)\end{gathered} \tag{3.37}$$

где оператор

$$\Delta_{-1}[\rho] = -\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial} \tag{3.38}$$

действующий на векторных полях введен согласованно с репараметризационно-инвариантной нормой

$$\|\varepsilon\|^2 = (\bar{\varepsilon}, \varepsilon) = \int_\Sigma d^2\sigma \rho^2 \bar{\varepsilon}\varepsilon \tag{3.39}$$

Осталось повторить рассуждение с мерой

$$\int Dg = \int \frac{D\bar{\varepsilon}D\varepsilon}{\mathcal{V}} \int D\varphi \cdot J[\rho] \tag{3.40}$$

и вычислением якобиана

$$\begin{aligned} 1 = \int D(\delta g) \exp\left(-\frac{1}{8}\|\delta g\|^2\right) = J[\rho] \int D\bar{\varepsilon}D\varepsilon D(\delta\tilde{\varphi}) \exp\left(-\frac{1}{8}\|\delta g\|^2\right) = \\ = J[\rho] \int D\bar{\varepsilon}D\varepsilon e^{-(\bar{\varepsilon},\Delta_{-1}\varepsilon)} \int D(\delta\tilde{\varphi}) \exp\left(-\frac{1+2C}{4}\int_\Sigma d^2\sigma \rho (\delta\tilde{\varphi})^2\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Будем считать, что последний интеграл (например, при удобном выборе константы $C = \frac{1}{2}$) определяет меру интегрирования по конформному фактору

$$\int D(\delta\varphi) \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2\sigma \rho (\delta\varphi)^2\right) = 1 \tag{3.42}$$

через нелинейную норму

$$\|\delta\varphi\|^2 = \int_\Sigma d^2\sigma \rho (\delta\varphi)^2 = \int_\Sigma d^2\sigma e^\varphi (\delta\varphi)^2 \tag{3.43}$$

Тогда якобиан замены очевидно равен

$$J[\rho] = \det \Delta_{-1}[\rho] = \det\left(-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial}\right) \tag{3.44}$$

детерминанту оператора Лапласа, действующего на векторные поля или (-1)-дифференциалы.

3.5 Конформная аномалия двумерной геометрии

Таким образом, зависимость меры в полном континуальном интеграле $\int DgDX$ определяется отношением детерминантов

$$\frac{\det \Delta_{-1}}{\det \Delta_0^{D/2}} \tag{3.45}$$

где в числителе и знаменателе - частные случаи операторов

$$\Delta_j[\rho] = -\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar{\partial} \tag{3.46}$$

(при $j = 0$ мы получаем (3.29)), действующие очевидной цепочкой в пространствах

$$\Omega_{j,0} \overset{\bar\partial}{\to} \Omega_{j,1} \overset{\rho^{-j}}{\to} \Omega_{0,1-j} \overset{\partial}{\to} \Omega_{1,1-j} \overset{\rho^{j-1}}{\to} \Omega_{j,0} \tag{3.47}$$

в пространствах (n,m)-дифференциалов $\Omega_{n,m} \ni \omega_{n,m}(dz)^n(d\bar z)^m$. Мы воспользовались здесь тем, что

$$\nabla_{\bar z}\omega_{j,0} = \partial_{\bar z}\omega_{j,0}, \quad \nabla_z\omega_{0,k} = \partial_z\omega_{0,k} \tag{3.48}$$

и все операции хорошо определены. Нас интересует случаи $j = -1$ и $j = 0$, но они легко обобщается на произвольный “спин” $j \in \mathbb{Z}/2$.

По аналогии со случаем скалярных полей для детерминантов операторов (3.46) можно написать

$$-\frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}\log\det\Delta_j = g^{\alpha\beta}\langle t^{(j)}_{\alpha\beta}\rangle = a_jR + b_j \tag{3.49}$$

то есть конформная аномалия дается той же структурой, что и в (3.30), но, вообще говоря, с другими коэффициентами - зависящими от вида конформной теории. Что же это за теория в данном случае?

3.6 Грассмановы интегралы и фермионы

Заметим, что если определить интеграл по антикоммутирующим или грассмановым числам (элементам $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Грассмана)

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0, \quad i,j = 1,\dots,n \tag{3.50}$$

правилами Березина

$$\int d\theta_i = 0, \quad \int d\theta_i\ \theta_j = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n \tag{3.51}$$

то такие интегралы легко вычислить для любой функции

$$f(\theta) = f_0 + \psi_i\theta_i + \tfrac{1}{2}f_{ij}\theta_i\theta_j + \ldots + f_{i_1\ldots i_n}\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_n} \tag{3.52}$$

например

$$\begin{aligned}\int d^n\theta\exp\left(\sum A_{ij}\theta_i\theta_j\right) &= \int\prod_{i=1}^n d\theta_i\exp\left(\sum A_{ij}\theta_i\theta_j\right) = \\ &= \pm 2^{n/2}\det A^{1/2} = \pm 2^{n/2}\mathrm{Pfaff}(A)\end{aligned} \tag{3.53}$$

где $A_{ij} = -A_{ji}$. Аналогично для “комплексной версии” грассмановых переменных

$$\int d^{2n}\theta\exp\left(\sum B_{ij}\bar\theta_i\theta_j\right) = \int\prod_{i=1}^n d\bar\theta_i d\theta_i\exp\left(\sum B_{ij}\bar\theta_i\theta_j\right) = \pm\det B \tag{3.54}$$

т.е. детерминанты при этом возникают в положительных степенях! Пользуясь этими правилами, для оператора (3.46) можно формально написать

$$\det\left(-\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar\partial\right)=\int D\bar c Dc \exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\rho^{1-j}\bar c\left(-\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar\partial\right)c\right) \tag{3.55}$$

в виде интеграла Березина по вспомогательным *грассмановым* полям - духам для параметров репараметризаций ε, $\bar\varepsilon$. Этот интеграл легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\int D\bar c Dc \exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\rho^{1-j}\bar c\left(-\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar\partial\right)c\right) &= \int D\bar c Dc \exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\rho^{-j}\partial\bar c\bar\partial c\right) = \\ = \int D\bar b D\bar c\; DbDc \exp\left(-\int_\Sigma d^2\sigma\rho^{j}\bar b b+\int_\Sigma d^2\sigma\left(b\bar\partial c+\bar b\partial\bar c\right)\right) &= \\ = \int D\bar b D\bar c\; DbDc \exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\left(b\bar\partial c+\bar b\partial\bar c\right)\right)\left(1-\int_\Sigma d^2\sigma\rho^{j}\bar b b+\ldots\right)&\end{aligned} \tag{3.56}$$

Часть зависящая только от полей b и $\bar b$ связана с нулевыми модами и мы пока не будем ее рассматривать. Для изучения аномалии (3.49) нам достаточно ограничиться основными свойствами двумерной конформной теории для грассмановых переменных

$$S_{bc}=\int_\Sigma d^2\sigma\left(b\bar\partial c+\bar b\partial\bar c\right) \tag{3.57}$$

с квадратичным действием первого порядка. Действие (3.57) определено для любых двойственных пар $(j,0)$-дифференциалов c и $(1-j,0)$-дифференциалов b, и им комплексно-сопряженных, хотя буквально для струны Полякова нам нужен случай $j=-1$, $1-j=2$. Грассмановы переменные, с помощью которых якобиан замены переписывается через дополнительный интеграл, называются духами Фаддеева-Попова.