Листок 2. *Срок сдачи — 30 октября.*

Задача 1. Пусть $\sigma = \mathrm{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_2 + 2e_3) \in \mathbb{Q}^3$.
a) Опишите конус $\sigma^\vee$.
b) Найдите порождающие $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^3$ (как полугруппы).
c) Опишите многообразие $\mathrm{Spec}(\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^3)$.

Задача 2. Пусть σ – конус, $v \in \sigma$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:
- v принадлежит относительной внутренности $\mathrm{RelInt}\,\sigma$,
- $\langle u, v\rangle > 0$ для всех $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$,
- $\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\perp$,
- $\sigma + \mathbb{Q}_{\geqslant 0}(-v) = \mathbb{Q}\sigma$,
- для любого $x \in \sigma$ найдётся положительное число p и $y \in \sigma$ такое, что $p \cdot v = x + y$.

Задача 3. Пусть $\dim \sigma = n = \dim N_{\mathbb{Q}}$ и σ острый. Верно ли, что у конусов σ и у $\sigma^\vee$ всегда одинаковое число порождающих?

Задача 4. Предположим, что $\tau \subset \sigma$, а отображение $U_\tau \mapsto U_\sigma$ является открытым вложением. Покажите, что τ – грань σ.

Задача 5. Пусть Δ – веер в N, Δ' – веер в N', X и X' – соответствующие торические многообразия. Докажите, что

$$\Delta \times \Delta' = \{\sigma \times \sigma' \,|\, \sigma \in \Delta, \sigma' \in \Delta'\}$$

является веером в $N \oplus N'$, а соответствующее этому вееру многообразие изоморфно $X \times X'$.

Задача 6. Докажите, что веер, конусами которого являются конуса, натянутые на всевозможные собственные подмножества множества $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, -e_1 - e_2 - \ldots - e_n\}$, даёт $\mathbb{P}^n$ (здесь $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис n-мерного пространства).

Задача 7. * Пусть $d_0, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ и взаимно просты в совокупности. Рассмотрим векторы $e_0, e_1, \ldots, e_n$ с нулевой суммой (любые n из которых линейно независимы) и решётку N, порождённую векторами $\frac{1}{d_i} e_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Конусами веера будут все конуса, натянутые на собственные подмножества в множестве $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$. Докажите, что соответствующее торическое многообразие (взвешенное проективное пространство) изоморфно

$$\mathbb{P}(d_0, d_1, \ldots, d_n) = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^\times,$$

где $\mathbb{C}^\times$ действует как $t \cdot (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (t^{d_0} x_0 : t^{d_1} x_1 : \ldots : t^{d_n} x_n)$.

Задача 8. Построить веер, соответствующий раздутию $\mathbb{C}^n$ в начале координат.

Задача 9. Доказать, что поверхность Хирцебруха $\mathbb{F}_a$ изоморфна проективизации расслоения на $\mathbb{P}^1$:

$$\mathbb{F}_a \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-a)).$$

Задача 10. Если конус σ полной размерности, то σ гладкий (симплициальный) $\Rightarrow \sigma^\vee$ гладкий (соответственно симплициальный).

Задача 11. При $\dim \sigma < n$ проверить, что гладкость конуса σ эквивалентна гладкости многообразия U_σ.

Задача 12. Построить все предельные точки для действия однопараметрических подгрупп тора на раздутии $\mathbb{C}^2$ в одной точке.

Про корни Демазюра.

Пусть $\Xi = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ — множество примитивных векторов на одномерных гранях конуса σ.

Определение. *Корень Демазюра конуса σ — это такой вектор $e \in M$, что для некоторого i, где $1 \leqslant i \leqslant r$ и $r = \operatorname{card}\Xi$, выполнены соотношения*

$$\langle \rho_i, e\rangle \;=\; -1 \quad \textit{и} \quad \langle \rho_j, e\rangle \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad j \neq i\,. \tag{1}$$

Это задаёт разбиение множества всех корней $\mathcal{R}(\sigma) = \sqcup\, \mathcal{R}_i$, где в $\mathcal{R}_i$ попадают корни e, для которых $\langle \rho_i, e\rangle \;=\; -1$.

Корень $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ определяет ЛНД ∂_e на M-градуированной алгебре $\Bbbk[X]$, заданное как

$$\partial_e(\chi^m) \;=\; \langle \rho_e, m\rangle \chi^{m+e}\,. \tag{2}$$

Задача 13. * Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между корнями Демазюра конуса σ и $\mathbb{T}$-однородными локально нильпотентными дифференцированиями соответствующей алгебры (дифференцирование $\mathbb{T}$-однородно, если его экспонента – $\mathbb{G}_a$ – коммутирует с действием $\mathbb{T}$).

Задача 14. * Докажите, что для каждого i множество $\mathcal{R}_i$ непусто.

Orbit-Cone Correspondence

Задача 15. Покажите, что выделенная точка x_τ является единичным элементом тора $\mathcal{O}_\tau$.

Задача 16. Рассмотрим действие тора $\mathbb{T}$ на аффинном многообразии U_σ. Докажите, что для этого действия $\mathcal{O}_\sigma$ является единственной замкнутой орбитой.

Задача 17. Покажите, что

$$\overline{\mathcal{O}_\tau} \cap U_\sigma = \bigcup_{\gamma,\ \tau \preccurlyeq \gamma \preccurlyeq \sigma} \mathcal{O}_\gamma.$$

Задача 18. Рассмотрим действие однопараметрической подгруппы тора χ^u, соответствующей $u \in N$. Покажите, что множество неподвижных точек этого действия совпадает с объединением тех $\overline{\mathcal{O}_\tau}$, для которых u лежит в $\operatorname{span}(\tau)$.