Алгебра, листок 2 (крайний срок сдачи – 23 октября)

1. Пусть $\mathbb{K}$ – подполе $\mathbb{L}$, причем $\mathbb{L}$ как векторное пространство над $\mathbb{K}$ имеет конечную размерность m. Докажите, что каждый элемент $\mathbb{L}$ является корнем многочлена с коэффициентами в $\mathbb{K}$ степени не выше m.

2. В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров так, что суммарный вес коров первой части равен суммарному весу коров другой части. Рассмотрите эти равенства как систему линейных уравнений на веса коров и докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса – элементы поля **a)** $\mathbb{F}_2$, **b)** $\mathbb{R}$.

3. Чему может и чему не может быть равен ранг произведения двух матриц, если они имеют размер $n \times n$ и ранги p и q соответственно? **a)** $n = 2$, **b)** n произвольное.

4. Докажите, что квадрат матрицы ранга 1 пропорционален ей самой.

5. Докажите, что для любых линейных отображений f и $g : V \to V$ имеют место включения $\mathrm{Ker}(f \circ g) \supset \mathrm{Ker} g$ и $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im} f$. Приведите пример f и g, для которых оба включения строгие.

6. Докажите, что для любого линейного отображения $V \to V$ ранга 1 в пространстве V найдется базис, в котором матрица отображения $(a_{i,j})$ имеет единственный ненулевой элемент: либо $a_{1,2} = 1$, либо $a_{1,1}$, причем для каждого отображения реализуется ровно один из этих двух случаев. **a)** $\dim V \leqslant 3$, **b)** $\dim V$ произвольная.

7. Вычислите определитель Вандермонда $V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$: докажите, что V_n как функция от x_n **a)** является многочленом степени $n-1$ со старшим коэффициентом V_{n-1} и **b)** имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; **c)** опираясь на эти данные, найдите V_n. Чему равен определитель Вандермонда, в котором i-ю строку заменили **d)** на $\big(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\big)$, где f – многочлен степени i с единичным старшим коэффициентом? **e)** на $(x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n)$?

8. Линейное отображение $F : V \to V$ называется нильпотентным, если $F^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Для такого отображения **a)** при $\dim V \leqslant 3$ и **b)** при произвольной $\dim V$ докажите, что в пространстве V есть базис, в котором у матрицы отображения $(a_{i,j})$ единственными ненулевыми элементами будут $a_{i,i+1} = 1$ для некоторых i. **c)** Докажите, что если F нильпотентно, то $F^{\dim V} = 0$.

9. На клетчатой бумаге нарисован по линиям сетки прямоугольник, и в клетках, граничащих с контуром прямоугольника с внешней стороны, написаны произвольные числа. Докажите, что во всех клетках прямоугольника можно расставить числа таким образом, чтобы каждое из них равнялось бы среднему арифметическому его четырех соседей.