ЛИСТОК 1. Поверхностные меры и объем

Анализ, 2 курс, **30.09.2015**

1◇1 Доказать, что для всякого непустого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ найдется конечное или счетное множество открытых попарно непересекающихся кругов в U, дополнение объединения которых до U имеет меру нуль.

1◇2 Доказать, что внешняя мера Лебега λ_n^* на $\mathbb{R}^n$, заданная формулой

$$\lambda_n^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} |P_j|\colon\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big\},$$

где inf берется по всем покрывающим A конечным или счетным наборам параллелепипедов P_j вида $P_j = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ и $|P_j|$ — объем P_j, инвариантна относительно сдвигов и ортогональных преобразований.

1◇3 Пусть $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем число $\alpha \in (0, n]$. Для всякого множества A в $\mathbb{R}^n$ его внешняя α-мера Хаусдорфа $H^\alpha(A)$ задается так. При фиксированном $\delta > 0$ положим

$$H_\delta^\alpha(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{diam} Q_k|^\alpha,\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,\ \operatorname{diam} Q_k \le \delta\Big\},$$

где inf берется по всем счетным покрытиям A замкнутыми множествами диаметра не более δ. Существует (возможно, бесконечный) предел

$$H^\alpha(A) := \lim_{\delta \to 0} H_\delta^\alpha(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^\alpha(A).$$

Доказать, что H^α не меняется при сдвигах и ортогональных преобразованиях.

1◇4 Пусть отображение $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ липшицево с постоянной L. Доказать, что

$$H^\alpha(f(A)) \le L^\alpha H^\alpha(A).$$

1◇5 Доказать, что H^n совпадает с $c_n \lambda_n^*$ и найти c_n.

1◇6 Доказать, что длина гладкой кривой на плоскости совпадает с ее внешней мерой Хаусдорфа порядка 1.

1◇7 Доказать, что для всякой непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\|x\| \le R} f(x)\, dx = \int_0^R \int_{\|x\| = r} f(x)\, \sigma_{n-1}(dx)\, dr,$$

где σ_{n-1} — поверхностная мера на сфере.

1◇8 Доказать, что интеграл от непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ по поверхностной мере на единичной сфере равен пределу при $\varepsilon \to 0$ объемных интегралов от $\varepsilon^{-1} f$ по множествам

$$\{x\colon\ 1 \le \|x\| \le 1 + \varepsilon\}.$$

1◇9 Пусть гладкая функция f на $\mathbb{R}^3$ гармонична, т.е.

$$\Delta f := \partial_{x_1}^2 f + \partial_{x_2}^2 f + \partial_{x_3}^2 f = 0.$$

Выразив объемный интеграл от f по $\{x\colon\ r \le \|x\| \le R\}$ через поверхностный, доказать, что для всякого x и всякой сферы $S(x, R)$ радиуса R с центром в x верно равенство

$$f(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(x,R)} f(y)\, \sigma_2(dy),$$

где σ_2 — поверхностная мера на сфере.

1◇10 Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Доказать формулу Пуассона

$$\int_{\|x\|=1} f(ax_1 + bx_2 + cx_3)\, d\sigma_2 = 2\pi \int_{-1}^{1} f\big(t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\big)\, dt,$$

где σ_2 — поверхностная мера.