Теория струн. Задачи 3. Функции Грина в двумерии

Двумерные операторы Лапласа и Дирака

Функцией Грина оператора Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ на плоскости называется функция $G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$ такая, что $\Delta_z G(z,\zeta) = 2\pi\delta^{(2)}(z-\zeta)$. Формально $\frac{1}{2\pi}G(z,\zeta)$ – это ядро интегрального оператора Δ^{-1}, обратного к оператору Лапласа.

Безмассовое уравнение Дирака на евклидовой плоскости $(\sigma_1\partial_x + \sigma_2\partial_y)\Psi = 0$ в комплексных координатах $z = x+iy$, $\bar z = x - iy$ расщепляется на два независимых уравнения для компонент: $\partial_{\bar z}\psi = 0$, $\partial_z\tilde\psi = 0$. Аналогично случаю оператора Лапласа можно ввести функцию Грина как ядро оператора $\bar\partial^{-1}$.

1. Докажите, что $\partial_{\bar z}\dfrac{1}{z-\zeta} = \pi\delta^{(2)}(z-\zeta)$, и тем самым функция $\dfrac{1}{\pi(z-\zeta)}$ является функцией Грина для оператора Дирака (в голоморфных координатах).

2. Пользуясь результатом предыдущей задачи, проверьте, что $\log|z-\zeta|$ является функцией Грина оператора Лапласа.

Граничная задача Дирихле для оператора Лапласа

Пусть D – односвязная область в комплексной плоскости. Задача Дирихле состоит в отыскании функции Φ, гармонической в области D и такой, что Φ равна заданной функции f на границе области. Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D (далее просто функция Грина) называется функция $G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$ в $D\times D$ такая, что: а) $\Delta_z G(z,\zeta) = 2\pi\delta^{(2)}(z-\zeta)$; б) $G(z,\xi) = 0$ при любых $z\in D$ и $\xi\in\partial D$.

1. Докажите, что $G(z,\zeta) = \log|z-\zeta| + O(1)$ при $z\to\zeta$.

2. Найдите функцию Грина, если D – а) верхняя полуплоскость, б) круг радиуса R с центром в 0.

3. Докажите, что функция Грина единственна и дается формулой
$$G(z,\zeta) = \log\left|\frac{w(z)-w(\zeta)}{1-w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|,$$
где $w(z)$ – взаимно однозначное конформное отображение области D на единичный круг, существующее в силу теоремы Римана.

4. Решите уравнение Лапласа $(\partial_x^2+\partial_y^2)\Phi = 0$ в верхней полуплоскости $y\geq 0$ с граничным условием $\Phi(x,0) = 1$ при $|x|\leq 1$ и 0 при $|x|\geq 1$.

5.* Проверьте, что функция Грина дает решение граничной задачи Дирихле в области D с помощью формулы
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D} f(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(z,\xi)\,|d\xi|,$$
где как обычно $z = x+iy$ и $\partial/\partial n_\xi$ – нормальная производная по второму аргументу (единичные нормальный вектор считается направленным во внешность области). Подумайте, как можно было бы сформулировать аналог задачи Дирихле для оператора Дирака.