1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл Полякова

4 Конформная аномалия в двумерной конформной теории поля

4.1 Конформная аномалия

Вспомним, что зависимость меры от конформного фактора в полном континуальном интеграле $\int DgDXe^{-S}$ определяется отношением детерминантов

$$\frac{\det \Delta_{-1}}{\det \Delta_0^{D/2}} \tag{4.1}$$

операторов

$$\Delta_j[\rho] = -\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar{\partial} \tag{4.2}$$

(при $j = 0$ и $j = -1$), действующие очевидной цепочкой

$$\Omega_{j,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega_{j,1} \xrightarrow{\rho^{-j}} \Omega_{0,1-j} \xrightarrow{\partial} \Omega_{1,1-j} \xrightarrow{\rho^{j-1}} \Omega_{j,0} \tag{4.3}$$

в пространствах (n, m)-дифференциалов $\Omega_{n,m} \ni \omega_{n,m}(dz)^n(d\bar{z})^m$. Мы воспользовались здесь тем, что

$$\nabla_{\bar{z}}\omega_{j,0} = \partial_{\bar{z}}\omega_{j,0}, \quad \nabla_z\omega_{0,k} = \partial_z\omega_{0,k} \tag{4.4}$$

и все операции хорошо определены. Нас непосредственно сейчас интересует случаи $j = -1$ и $j = 0$, но вообще встречается произвольный "спин" $j \in \mathbb{Z}/2$. Поля j-дифференциалов $\omega_{j,*} \in \Omega_{j,*}$ характеризуются законом преобразования при голоморфных заменах координат

$$\tilde{\omega}_{j,*}(\tilde{z})d\tilde{z}^j = \omega_{j,*}(z)dz^j, \tag{4.5}$$

или

$$\delta\omega_{j,*} = \tilde{\omega}_{j,*}(z) - \omega_{j,*}(z) = \varepsilon(z)\partial\omega_{j,*}(z) + j\varepsilon'(z)\omega_{j,*}(z) + O(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

при малых преобразованиях $\tilde{z} = z - \varepsilon(z)$. Аналогичный закон для антиголоморфных преобразований получается комплексным сопряжением, вообще в дальнейшем нам будет часто удобно забывать о комплексном сопряжении и рассматривать до какого-то момента комплексно-сопряженные координаты как независимые переменные $(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^2$ в двумерном комплексном пространстве.

Конформная аномалия (несохранение вейлевской симметрии) для детерминантов операторов (4.2) имеет вид

$$2\pi\alpha' \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} S_{\text{eff}} = -2\pi\alpha' \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} \log\det\Delta_j = g^{\alpha\beta}\langle t^{(j)}_{\alpha\beta}\rangle = a_j R + b_j \tag{4.7}$$

с коэффициентами - зависящими от вида конформной теории. Остается определить значение этих коэффициентов в эффективном действии (ну и конечно - вид эффективного действия).

4.2 Тензор энергии-импульса

Для действия Полякова свободных скалярных полей в двумерии мы давно уже определили тензор энергии-импульса

$$t_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha X \partial_\beta X - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X \partial_{\beta'} X\right) \tag{4.8}$$

который является симметричным тензором ранга 2 и сохраняется на уравнениях движения свободной скалярной теории $\partial^\alpha \partial_\alpha X = 0$

$$\nabla^\alpha t_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.9}$$

Особенно просто это выглядит в комплексных координатах для конформной метрики

$$ds^2 = \rho dz d\bar{z} = e^{\varphi} dz d\bar{z} \tag{4.10}$$

где условие ковариантного сохранения (4.9) принимает вид

$$\partial_{\bar{z}} t_{zz} + \rho \partial_z (\rho^{-1} t_{z\bar{z}}) = 0 \tag{4.11}$$

вместе с комплексно-сопряженным уравнением, и для конформной теории (4.8) в силу $t_{z\bar{z}} = 0$ сводится к уравнению голоморфности

$$\partial_{\bar{z}} t_{zz} = 0, \qquad \partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{4.12}$$

на голоморфные токи $t_{zz} = -\frac{1}{2}(\partial X)^2$ спина 2, элементарно следующие из $\bar{\partial}\partial X = 0$, т.е. голоморфности производной ∂X на уравнениях движения.

В случае конформной аномалии все уже не так просто, поскольку след $g^{\alpha\beta}\langle t_{\alpha\beta}\rangle = aR + b$. Коэффициент b можно убрать с помощью контрчлена $\mu^2 \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g}$, поэтому обратим основное внимание на первое слагаемое, которое в конформной калибровке можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 4\rho^{-1} t_{z\bar{z}} &= aR = -2a\rho^{-1}\partial_z \partial_{\bar{z}} \log\rho \\ t_{z\bar{z}} &= -\frac{a}{2}\partial_z\partial_{\bar{z}}\log\rho = -\frac{a}{2}\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi \end{aligned} \tag{4.13}$$

Уравнение (4.11) в этом случае принимает вид ($\rho = e^{\varphi}$)

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{\bar z} t_{zz} + \rho\partial_z(\rho^{-1}t_{z\bar z}) = \partial_{\bar z} t_{zz} + \frac{a}{2}\partial_z\varphi\partial_z\partial_{\bar z}\varphi - \frac{a}{2}\partial_z^2\partial_{\bar z}\varphi = \\ = \partial_{\bar z}\left(t_{zz} + \frac{a}{4}(\partial_z\varphi)^2 - \frac{a}{2}\partial_z^2\varphi\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

т.е. голоморфной величиной при наличии аномалии является модифицированное выражение

$$T_{zz} = t_{zz} + \frac{a}{4}\left((\partial_z\varphi)^2 - 2\partial_z^2\varphi\right) \tag{4.15}$$

которое определяет конформные свойства квантовой теории.

4.3 Псевдотензор и центральный заряд

Выражение (4.15) уже не является тензором 2 ранга или 2-дифференциалом относительно голоморфных замен координат $z \to w(z)$. Действительно,

$$\begin{gathered} e^{\varphi(z,\bar z)}dzd\bar z = e^{\varphi(w,\bar w)}dwd\bar w, \qquad \varphi(z,\bar z) = \varphi(w,\bar w) + \log|w'(z)|^2 \\ \partial_z\varphi(z) = w'(z)\partial_w\varphi(w) + \frac{w''(z)}{w'(z)} \\ \partial_z^2\varphi(z) = w'(z)^2\partial_w^2\varphi(w) + w''(z)\partial_w\varphi(w) + \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 \end{gathered} \tag{4.16}$$

то есть добавка

$$\partial_z\varphi(z)^2 - 2\partial_z^2\varphi(z) = w'(z)^2\left(\partial_w\varphi(w)^2 - 2\partial_w^2\varphi(w)\right) - 2\{w,z\} \tag{4.17}$$

где мы ввели шварциан

$$\{w,z\} = \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 \tag{4.18}$$

Отсюда следует, что величина (4.15) также преобразуется неоднородно, т.е.

$$T_{zz}(z) = T_{ww}(w)w'(z)^2 - \frac{a}{2}\{w,z\} \tag{4.19}$$

и является псевдотензором (или проективной связностью), превращаясь в настоящий тензор лишь при $a = 0$. В инфинитезимальной форме, т.е. при $w(z) = z - \epsilon(z)$ с малыми отклонениями получим

$$\delta_\epsilon T(z) = 2\epsilon'(z)T(z) + \epsilon(z)\partial T(z) + \frac{c}{12}\epsilon'''(z) \tag{4.20}$$

где мы изменили нормировку коэффициента $a = \frac{c}{6}$. В такой нормировке он называется *центральным зарядом* (алгебры Вирасоро - центрально расширенной алгебры векторных полей на окружности). Остается понять каким-нибудь естественным способом - за счет чего может появиться последний член в формуле (4.20) в квантовой теории.

4.4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

Вспомним формулы

$$
\begin{aligned}
I(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \\
I(A|\mathbf{b}) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j + \sum_i b_i x_i} = \frac{e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_i A^{-1}_{ij} b_j}}{\sqrt{\det A}}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

где под знаком детерминанта в общем случае следует понимать симметричную часть матрицы A: $A_{ij} = A_{ji}$, или - точно так же в грассмановом случае

$$
\tilde{I}(A) = \int d^n\theta\; e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\theta_i\theta_j} = \pm\sqrt{\det A} = \pm\mathrm{Pf}(A)
\tag{4.22}
$$

где теперь последнем случае существенно, что матрицу A можно считать анти-симметричной $A_{ij} = -A_{ji}$, а кроме того

$$
\tilde{I}(A|\eta) = \int d^n\theta\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}\theta_i\theta_j + \sum_i \eta_i\theta_i} = \pm e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} A^{-1}_{ij}\eta_i\eta_j}\sqrt{\det A}
\tag{4.23}
$$

После чего можно определить (и вычислить!) “корреляторы”

$$
\begin{aligned}
\langle x_{i_1}\ldots x_{i_k}\rangle &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; x_{i_1}\ldots x_{i_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j}} = \\
&= \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\ldots\partial b_{i_k}}\; \frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)}\bigg|_{\mathbf{b}=0} = \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\ldots\partial b_{i_k}}\; e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_i A^{-1}_{ij} b_j}\bigg|_{\mathbf{b}=0}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Из правой части (4.24) видно, что любые корреляторы в гауссовой модели выражаются через парные: теорема Вика. В частности, из (4.24) следует

$$
\begin{aligned}
&\langle x_i\rangle = 0, \quad \langle x_i x_j\rangle = A^{-1}_{ij}, \quad \langle x_i x_j x_k\rangle = 0 \\
&\langle x_i x_j x_k x_l\rangle = A^{-1}_{ij}A^{-1}_{kl} + A^{-1}_{ik}A^{-1}_{jl} + A^{-1}_{il}A^{-1}_{jk}
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

т.е. что нормированная двухточечная функция равна ядру обратного оператора, а все остальные - через нее выражаются (как будут выглядеть аналогичные формулы для случая нечетных переменных?). При этом мы использовали неявно, что:

- У матрицы A_{ij} все собственные значения положительны, в частности нет нетривиальных решений уравнения $\sum_j A_{ij}x_j = 0$ и существует A^{-1}.
- Если существуют $a_j < 0$ или $a_j = 0$, то надо разбить пространство J, $j \in J$ на $J = J_0 \oplus J_\perp$, и искать обратный оператор на $J_\perp$.

В случае даже свободной теории бозонных полей нам приходится рассматривать операторы или их корреляционные функции, т.е. средние типа $\langle \mathrm{Pol}(X, \partial X, \ldots)\rangle$ в смысле гауссова интеграла. В отличие от конечномерного случая это может приводить к нетривиальным неожиданностям - уже в теории частицы.

4.5 Корреляционные функции в одномерии

Вспомним случай, который мы уже разбирали - интегралы по траекториям

$$
\begin{gathered}
I(T|X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0, X(1)\ =X_1} DX e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{X}^2}{2}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T) \\
I(T) = \int_{X(0)=X(1)=0} DX e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{X}^2}{2}}
\end{gathered}
\tag{4.26}
$$

с фиксированными граничными условиями, которые отличаются именно тем, что оператор $A \to \Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ вообще говоря имеет нетривиальную нулевую моду $\Delta X = 0$, но только не при нулевых граничных условиях. Поэтому обратный оператор

$$
-\frac{d^2}{dt^2} G(t,t') = \delta(t-t')
\tag{4.27}
$$

проще искать именно при условии, что $G(0,t') = G(T,t') = 0$, $0 < t' < T$. (Мы переопределили параметр на мировой линии $\tau = t/T$, так что $0 < t < T$).

Смысл этой функции очевиден из полного аналога конечномерного рассуждения. Рассмотрим теперь $I(T|j) = \int_{X(0)=X(1)=0} DX e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{X}^2}{2} + \int_0^T dt j(t) X(t)}$ и сделаем в нем подстановку $X(t) = \tilde{X}(t) + \int G(t,t') j(t') dt'$, тогда

$$
\begin{gathered}
I(T|j) = \int_{X(0)=X(1)=0} DX e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{X}^2}{2} + \int_0^T dt j(t) X(t)} = \\
= \exp\left(\frac{1}{2} \int dt dt' j(t) G(t,t') j(t') \right) \int_{\tilde{X}(0)=\tilde{X}(1)=0} D\tilde{X} e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{\tilde{X}}^2}{2}} = \\
= \exp\left(\frac{1}{2} \int dt dt' j(t) G(t,t') j(t') \right) I(T|0)
\end{gathered}
\tag{4.28}
$$

Поэтому

$$
G(t,t') = \langle X(t) X(t') \rangle = \frac{1}{I(T|0)} \left. \frac{\delta^2}{\delta j(t) \delta j(t')} I(T|j) \right|_{j=0}
\tag{4.29}
$$

равна двухточечной корреляционной функции. Отметим сразу, что

- Рассуждение не зависит от размерности: мировой линии, мирового листа, мирового объема итп.

- Точно такое же рассуждение годится и для интеграла по грассмановым переменным, поэтому корреляционные функции свободных фермионных полей можно вычислять так же как и для бозонных (аккуратно учитывая нечетность - или изменения знака пре перестановках).

Задачу эту можно (и предстоит!) решить многими способами. Приведем однако сразу ответ в форме Фейнмана

$$\langle X(t)X(t')\rangle = \begin{cases} \dfrac{t(T-t')}{T}, & t<t' \\ \dfrac{t'(T-t)}{T}, & t>t' \end{cases} \tag{4.30}$$

и в форме Полякова

$$\langle X(t)X(t')\rangle = -\tfrac{1}{2}|t-t'| + \tfrac{1}{2}(t+t') - \frac{tt'}{T}, \quad 0<t,t'<T \tag{4.31}$$

Из второго выражения видно например, что коррелятор скоростей

$$\langle \dot{X}(t)\dot{X}(t')\rangle = \delta(t-t') - \frac{1}{T}, \quad 0<t,t'<T \tag{4.32}$$

откуда следует, что средний квадрат скорости $\langle \dot{X}(t)^2\rangle$ квантовой частицы является плохо определенной величиной. Основные задачи, оставшиеся в одномерном случае

- Обосновать ответ (4.30), (4.31). Получить его, например, методом Фурье (спектральная теория оператора Лапласа?).
- Вычислить формулу $\langle X(t)X(t')\rangle$ для периодических граничных условий $t \sim t+T$. В данном случае уравнение (4.27) нужно модифицировать
$$-\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = \delta(t-t') - \frac{1}{T} \tag{4.33}$$
- Вычислить двухточечную функцию $\langle \Psi(t)\Psi(t')\rangle$ одномерных фермионов с действием на мировой линии $S = \int_0^T dt\Psi\dot{\Psi}$.

4.6 Двумерный случай - струна

В теории на двумерном мировом листе мы можем рассмотреть аналогичную задачу. Выберем сначала и для простоты метрику в конформном виде $ds^2 = e^{\varphi}(d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2) = e^{\varphi}dzd\bar{z}$ и решим задачу для действия свободной бозонной струны (пока $T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = 1$)

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X\partial_\alpha X - \int_\Sigma d^2zJX \\ \Delta X(z,\bar{z}) = -J(z,\bar{z}) \end{gathered} \tag{4.34}$$

Это практически полностью повторяет одномерное рассуждение

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X\partial_\alpha X - \int_\Sigma d^2zJX = \\ = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2zX(-\Delta)X - \int_\Sigma d^2zJX = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2zJX = \\ = \tfrac{1}{2}\int d^2zd^2wJ(z)G(z,w)J(w) \end{gathered} \tag{4.35}$$

где $X(z) = \int d^2wG(z,w)J(w)$ решение уравнения в (4.34), в котором использована функция Грина (действующего на функциях) двумерного оператора Лапласа $\Delta = \partial_1^2+\partial_2^2 = 4\bar{\partial}\partial$

$$\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) \tag{4.36}$$

Тогда, как и в случае частицы, для двухточечного коррелятора получим

$$\langle X(z)X(z')\rangle = G(z,z') \tag{4.37}$$

Какие же существуют решения у уравнения (4.36)?

- Локальное (или на всей комплексной плоскости $\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) - \delta^{(2)}(z-\infty)$)

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\log|z-w| \tag{4.38}$$

  Физический смысл - потенциал точечного источника, например в нуле при выборе $w = 0$. Такой потенциал очевидно центрально симметричен $G(z,0) = \Phi(|z|)$ и удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r) = 0$ при $r \neq 0$, что очевидно дает двумерный потенциал Кулона $\Phi(r) = Q\log r$, а заряд Q определяется из закона Гаусса $\oint dl\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \oint rd\phi\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2\pi Q = 1$. При этом в уравнение (4.36), если считать его глобально определенном на всей сфере, нужно добавить еще одну δ-функцию в бесконечности, отвечающую за закон сохранения заряда на компактном многообразии и нетривиальной асимптотике $G(z,w) \underset{z\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi}\log|z|$.

- Решение задач Дирихле (и Неймана) в области, например на полуплоскости или в единичном круге (важно для теории открытых струн).

- Решение с периодическими граничными условиями - на цилиндре или на торе.

4.7 Двумерные фермионы

Следующее наблюдение заключается в том, что детерминант

$$\begin{gathered} \det\left(-\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar{\partial}\right) = \int D\bar{c}Dc\exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\rho^{1-j}\bar{c}\left(-\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar{\partial}\right)c\right) = \\ = \int D\bar{b}D\bar{c}\;DbDc\exp\left(\int_\Sigma d^2\sigma\left(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}\right)\right)(1 - \int_\Sigma d^2\sigma\rho^j\bar{b}b + \ldots) \end{gathered} \tag{4.39}$$

можнт быть представден в виде интеграла по грассмановым переменным

$$S_{bc} = \int_{\Sigma} d^2\sigma \left(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c} \right) \tag{4.40}$$

с квадратичным действием первого порядка. Действие (4.40) определено для любых двойственных пар $(j, 0)$-дифференциалов c и $(1-j, 0)$-дифференциалов b, и им комплексно-сопряженных, хотя буквально для струны Полякова нам нужен случай $j = -1$, $1 - j = 2$. Грассмановы переменные, с помощью которых якобиан замены переписывается через дополнительный интеграл, называются духами Фаддеева-Попова.

В случае $j = 1/2$ эта система в точности отвечает двумерным безмассовым фермионам в действием Дирака-Вейля, которое можно свести в базисе $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$ к сумме

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2z \overline{\Psi} \gamma^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2z \left(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi} \right) \tag{4.41}$$

где мы тоже выбрали метрику в конформно-плоском виде. В случае четного числа фермионных полей-координат их можно комплексифицировать, в результате действие будет иметь вид

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2z \left(\tilde{\psi}\bar{\partial}\psi + \tilde{\bar{\psi}}\partial\bar{\psi} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2z \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi + c.c. \tag{4.42}$$

где $\tilde{\psi}$ и ψ - комплексные фермионы, или различные грассмановы функции (поскольку они компоненты одного и того же спинорного случая, то отвечают симметричному выбору $j = 1 - j$, т.е. спину $j = 1/2$) на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения

$$\bar{\partial}\psi = 0, \qquad \bar{\partial}\tilde{\psi} = 0 \tag{4.43}$$

а для "анти-голоморфной части" действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.

Ключевым моментом теперь является все то же рассуждение с гауссовым интегралом, приводящем к двухточечной корреляционной функции

$$\langle \tilde{\psi}(z)\psi(z') \rangle = \frac{1}{z - z'} \tag{4.44}$$

которая является следствием формулы Коши

$$\bar{\partial} \frac{1}{z - z'} = \pi \delta^{(2)}(z - z') \tag{4.45}$$