1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл Полякова

4 Конформная аномалия в двумерной конформной теории поля

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

5.1 Корреляционные функции кулоновского газа

Решение уравнения с двумя источниками $\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) - \delta^{(2)}(z-\infty)$ на плоскости

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi} \log|z-w| \tag{5.1}$$

легко обобщается на случай нескольких точечных источников на сфере (компактифицированной плоскости) с зарядами $\{P_j\}$, $j = 1,\ldots,N$, удовлетворяющими $\sum_j P_j = 0$. Это действие на данной конфигурации - решении уравнения [1]

$$\Delta X_{\rm cl} = -i \sum_j P_j \delta^{(2)}(z-z_j) \tag{5.2}$$

дает основной вклад в гауссов интеграл

$$\begin{aligned} S[X_{\rm cl}|P] &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z d^2w J(z) \log|z-w| J(w) \Big|_{J(z)=i\sum_j P_j \delta^{(2)}(z-z_j)} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j,k} P_j \cdot P_k \log|z_j - z_k| = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_j P_j^2 \log\epsilon_j - \frac{1}{2\pi} \sum_{j<k} P_j \cdot P_k \log|z_j - z_k| \end{aligned} \tag{5.3}$$

или, восстанавливая размерное натяжение струны $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ (до этого мы считали, что $\alpha' = \frac{1}{2\pi}$),

$$\frac{\int DX e^{-\frac{T}{2}(X,\Delta X)+(J,X)}}{\int DX e^{-\frac{T}{2}(X,\Delta X)}} = \exp(-S[X_{\rm cl}|P;\{z_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2/2} \prod_{j<k} |z_j - z_k|^{\alpha' P_j \cdot P_k} \tag{5.4}$$

[1] Зачем выбирать источники чисто мнимыми осознаем потом.

Вспоминая наши рассуждения про гауссовы интегралы мы понимаем, что на самом деле вычисляли следующую *корреляционную функцию*

$$\langle\prod_j V_{\alpha_j}(z_j)\rangle_X = \frac{\int DX\ e^{-S}\prod_j V_{\alpha_j}(z_j)}{\int DX\ e^{-S}} = \prod_{j<k}|z_j - z_k|^{\alpha_j\cdot\alpha_k} \tag{5.5}$$

в теории свободного скалярного безмассового поля с действием

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2z\ \partial_\alpha X\partial_\alpha X \tag{5.6}$$

для экспоненциальных *вершинных операторов*

$$V_{\alpha_j}(z_j) = \epsilon_j^{-\alpha_j^2}\exp\left(iP_jX(z_j)\right), \qquad \alpha_j = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}P_j \tag{5.7}$$

где нам часто, в зависимости от конкретного случая, будет удобно фиксировать квадрат струнной длины α' какой-нибудь константой. Несколько замечаний:

- Удобно считать P_j имеющими размерность импульса, а α_j - "обезразмеренными" (кулоновскими) зарядами. Операторы

$$\exp\left(iPX(z)\right) = \int dx e^{iPx}\delta(x - X(z)) \tag{5.8}$$

  являются двойственными по Фурье к операторам фиксирующим координаты струны в физическом пространстве-времени.

- Поскольку "нулевая мода" - константа $X(z,\bar z) = X_0$ выпадает из квадратичного действия (5.6), можно считать, что интеграл по ней в (5.5)

$$\int dX_0\prod_j \exp\left(iP_jX_0\right) = 2\pi\delta\left(\sum_j P_j\right) \tag{5.9}$$

  дает δ-функцию, т.е. закон сохранения полного импульса-заряда.

- Сингулярный размерный множитель в определении (5.7) нужен в частности для того, чтобы левая и правая часть равенства одинаковым образом преобразовывалась при масштабных (и конформных!) преобразованиях *мирового листа* [2]. Действительно,

[2]Легко проверить это утверждение, например, для дробно-линейных преобразований Мёбиуса $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, отвечающих глобально определенным конформным преобразованиям сферы.

при $z \to \lambda z$, $z_j \to \lambda z_j$ действие инвариантно, если считать, что $X(z) \to X(\lambda z)$, $P_j \to P_j$. Однако,

$$\begin{gathered} \prod_{j<k} |z_j - z_k|^{2\alpha_j\cdot\alpha_k} \to |\lambda|^{2\sum_{j<k}\alpha_j\alpha_k} \prod_{j<k} |z_j - z_k|^{2\alpha_j\cdot\alpha_k} \\ \lambda^{2\sum_{j<k}\alpha_j\alpha_k} \underset{\sum_j \alpha_j = 0}{=} \lambda^{-\sum_j \alpha_j^2} \end{gathered} \tag{5.10}$$

и наличие *размерного* множителя $\epsilon_j^{-\alpha_j^2} \to \lambda^{-\alpha_j^2}\epsilon_j^{-\alpha_j^2}$ (поскольку $\epsilon_j \to \lambda\epsilon_j$) в определении (5.7) восстанавливает равенство (5.5) после масштабного преобразования.

5.2 Перенормировка и аномальная размерность

Вспомним, что мы уже встречались с этим явлением, когда обсуждали вычисление пропагатора частицы:

- Между величинами в классической и квантовой теории может существовать нетривиальная связь. Наивно введенные параметры из классической задачи иногда приходится доопределять *сингулярным* образом, чтобы ответ в квантовой задаче имел разумный физический смысл. В данном случае это множитель $\epsilon_j^{-\alpha_j^2}$ (“контрчлен”) в определении вершинного оператора, который сам по себе плохо определен при снятии регуляризации $\epsilon_j \to 0$, однако только *перенормированная* на произведение таких факторов корреляционная функция имеет конечную величину и разумный физический смысл.

- Квантовой доопределение приводит к важнейшим физическим следствиям.

Мы пока обсудили лишь одно из них - масштабную размерность δ, которая у классического скалярного поля $X(z)$ - координаты струны - равна нулю, так как $\tilde{X}(\tilde{z}) = X(z)$. Вообще говоря, в классической теории размерности “операторов” могут быть только целыми (у фермионов - полуцелыми из-за их неоднозначности), если эти размерности определить как

$$\tilde{O}(\tilde{z}) = \lambda^{-\delta} O(z), \qquad \tilde{z} = \lambda z \tag{5.11}$$

для собственных функций оператора растяжения. При этом классические размерности в теории скалярного поля очевидно равны количеству производных

$$\begin{gathered} O_0(z) = f(X(z)), \qquad \delta = 0 \\ O_1(z) = \partial X f(X(z)) + \bar{\partial} X g(X(z)), \qquad \delta = 1 \end{gathered} \tag{5.12}$$

и т.д. для любых функций скалярного поля $X(z)$, не содержащей его производных.

От масштабной размерности легко перейти к конформным $(\Delta, \bar{\Delta})$ - относительно масштабных или конформных преобразований на мировом листе, связанными отдельно с растяжениями голоморфных или антиголоморфных координат. Собственно мы уже встречались с этим, обсуждая пространства (n, m)-дифференциалов, для которых конформные размерности $(\Delta, \bar{\Delta}) = (n, m)$ классические и целочисленные (в крайнем случае - полуцелочисленные). При этом масштабная размерность $\delta = \Delta + \bar{\Delta}$, а разность конформных $\Delta - \bar{\Delta}$ часто называется спином. Очевидно, что для объектов с нулевым спином при этом возникает фактор $\delta = 2\Delta$.

Формула (5.5) однако означает, что в квантовой теории экспонента $e^{iPX(z,\bar{z})}$ приобретает *аномальную* размерность $\frac{1}{2}\alpha' P^2 = \alpha^2 = 2\Delta$, т.е. результат для коррелятора соответствующим образом нетривиально преобразуется при масштабных преобразованиях. Это означает, например, что в квантовой теории замкнутых струн независящий от выбора координат оператор $\int_\Sigma d^2z\ e^{iPX(z)}$ может существовать лишь при $P^2 = 4/\alpha'$, или в случае многомерного пространства Минковского

$$-P^2 = -P_\mu P^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = -\frac{4}{\alpha'} \tag{5.13}$$

только для тахиона - частицы с отрицательным квадратом массы $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$.

5.3 Двухточечные функции

Рассмотрим подробнее простейший случай коррелятора экспоненциальных полей (5.5) - двухточечный, так как одноточка $\langle e^{i\alpha X(z)}\rangle \sim \delta(\alpha)$ равна нулю при $\alpha \neq 0$. В случае двухточки закон сохранения заряда оставляет единственный ненулевой вариант

$$\langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z')\rangle = \langle e^{i\alpha X(z)} e^{-i\alpha X(z')}\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{2\alpha^2}} = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} \tag{5.14}$$

где $\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2$ - аномальная размерность (как оператора V_α, так и оператора $V_{-\alpha}$). Общий вопрос о спектре допустимых операторов в теории, т.е. множестве $\mathcal{A}$ допустимых значений $\alpha \in \mathcal{A}$ чрезвычайно важный, и не самый простой - мы вернемся к нему позже. В данный момент заметим лишь, что выражение (5.14) допускает голоморфную факторизацию

$$\langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z')\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} = \frac{1}{(z-z')^{2\Delta_\alpha}} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{z}')^{2\Delta_\alpha}} \tag{5.15}$$

после которой в случае общего положения каждый из сомножителей перестает вообще говоря быть однозначной функцией (или приобретает нетривиальную монодромию при обходе $z \circlearrowleft z'$). Это не так, однако, при $2\Delta_\alpha = k \in \mathbb{Z}$, т.е. (для убывающих корреляционных функций) для

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} P_k = \sqrt{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.16}$$

В этом случае можно пытаться придать смысл, например, коррелятору голоморфных частей операторов $J_\pm(z) = V_{\pm\sqrt{2}}(z)$ (размерностей $\Delta = 1$)

$$\langle J_+(z)J_-(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{5.17}$$

который окадывается "очень похожим" на коррелятор двух голоморфных токов - производных скалярного поля $J(z) = i\partial X(z)$

$$\langle J(z)J(z')\rangle = -\alpha'\partial_z\partial_{z'}\log|z-z'| = \frac{\alpha'/2}{(z-z')^2} \underset{\alpha'=2}{=} \frac{1}{(z-z')^2} \tag{5.18}$$

у которых - наоборот - вся размерность $\Delta = 1$ классическая, а аномальная равна нулю.

Наконец, в случае $\alpha = \pm 1$ голоморфные и антиголоморфные части тоже могут быть определены сами по себе, например

$$\langle V_+(z)V_-(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{5.19}$$

и отвечают коррелятору некоторых операторов размерности $\Delta = \frac{1}{2}$ с полюсом первого порядка.

5.4 Корреляторы двумерных фермионов

Вспомним действие Вейля для двумерных безмассовых комплексных фермионов

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\ \psi^\dagger\bar\partial\psi \quad (\ +c.c.) \tag{5.20}$$

где $\tilde\psi$ и ψ - комплексные фермионы, или различные грассмановы функции (1/2-дифференциалы) на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения [3]

$$\bar\partial\psi = 0, \qquad \bar\partial\psi^\dagger = 0 \tag{5.21}$$

и для которых рассуждение с гауссовым интегралом приводит к двухточечной корреляционной функции

$$\langle\psi^\dagger(z)\psi(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{5.22}$$

являющейся следствием формулы Коши

$$\bar\partial\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z') \tag{5.23}$$

Что можно сказать про эту систему более подробно:

[3] Для "анти-голоморфной части" действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.

- Из инвариантности действия (5.20) следует, что размерности $\Delta_\psi = \Delta_{\tilde\psi} = \frac{1}{2}$, и это размерности классические. Для конформных размерностей $(\Delta, \bar\Delta)$ относительно независимых растяжений z и $\bar z$, фермионы с $(\Delta, \bar\Delta) = (\frac{1}{2}, 0)$ являются 1/2-дифференциалами. Действительно, действие (5.20) (как и бозонное действие (5.6)) инвариантно относительно произвольных независимых голоморфных замен координат

$$\tilde z = f(z), \qquad \tilde{\bar z} = \tilde f(\bar z), \qquad (z, \bar z) \in \mathbb{C}^2 \tag{5.24}$$

при условии, что $\psi(z) dz^{1/2} = \tilde\psi(\tilde z) d\tilde z^{1/2}$, $\psi^\dagger(z) dz^{1/2} = \tilde\psi^\dagger(\tilde z) d\tilde z^{1/2}$.

- Корреляционная функция (5.22) совпадает с корреляционной функцией (5.19), а именно

$$\langle \psi^\dagger(z)\psi(z')\rangle_\Psi = \langle V_+(z)V_-(z')\rangle_X = \langle e^{iX(z)}e^{-iX(z')}\rangle_X \tag{5.25}$$

при отождествлении фермионов с “голоморфными частями” скалярных полей

$$\psi^\dagger(z) \leftrightarrow e^{iX(z)}, \qquad \psi(z) \leftrightarrow e^{-iX(z)} \tag{5.26}$$

составных операторов в квантовой теории, так что ненулевая классическая размерность фермионов набирается из аномальной размерности, т.е. за счет квантовых эффектов.

- Рассматривая более общие корреляционные функции можно получить одно из простейших, но уже достаточно общих проявлений *бозонизации* - связи корреляционных функций конформных теорий бозонов и фермионов в двумерии. Можно попробовать сравнить корреляторы произвольного числа

$$\langle \prod_{i,j} V_+(z_i)V_-(w_j)\rangle_X = \langle \prod_{i,j} e^{iX(z_i)}e^{-iX(w_j)}\rangle_X \overset{?}{=} \langle \prod_{i,j} \psi^\dagger(z_i)\psi(w_j)\rangle_\Psi \tag{5.27}$$

бозонов [4] и фермионов на сфере (а также на торе, или даже римановой поверхности произвольного рода). Вычисление корреляторов в левой и правой части (5.27) на сфере приводит к доказательству детерминантной формулы Коши, а на кривых старшего рода - замечательного тождества Фэя.

5.5 Открытая струна и амплитуда Венециано

Задача о нахождении действия с точечными источниками решается аналогично случаю замкнутой струны, где теперь все точки $\{z_j = \xi_j\}$ можно считать находящимися на границе $\mathrm{Im}\xi_j = 0$ [5], а вместо наивной функции Грина (5.1) следует воспользоваться функцией

[4] Где мы используем факторизацию и говорим только про голоморфную часть корреляционной функции.

[5] Строго говоря, следует решить задачу для точек “близких к границе” и потом совершить предельный переход.

Грина $G_N(z,w)$ задачи Неймана, например - в полуплоскости

$$G_N(z,w) = \frac{1}{2\pi T}\log|z-w||z-\bar{w}| \tag{5.28}$$

удовлетворяющей граничному условию

$$\begin{aligned} &\left(\partial_z G_N(z,w) - \bar{\partial}_{\bar{z}} G_N(z,w)\right)\Big|_{\partial\Sigma} = \\ &= \left(\partial_z G_N(z,w) - \bar{\partial}_{\bar{z}} G_N(z,w)\right)\Big|_{z=\bar{z}} = 0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Вычисляя квадратичное действие для данной конфигурации открытой струны, очевидно получим

$$\begin{aligned} S[X|P] &= \frac{1}{4\pi T}\int d^2z d^2w J(z) G_N(z,w) J(w)\Big|_{J(z)=-i\sum_j P_j\delta^{(2)}(z-\xi_j)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi T}\sum_j P_j^2 \log\epsilon_j - \frac{1}{\pi T}\sum_{j<k} P_j\cdot P_k \log|\xi_j-\xi_k| \end{aligned} \tag{5.30}$$

или, используя $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$,

$$\exp(-S[X|P;\{\xi_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2} \prod_{j<k} |\xi_j-\xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \tag{5.31}$$

Наконец, попытаемся получить осмысленный результат в квантовой теории струн пользуясь полученным выражением - решением по сути дела классической задачи. Из общих принципов - это отвечает суммированию по всем конфигурациям, которое в главном приближении дается классическим действием:

$$\sum_{\text{paths}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_{\text{cl}}\right) \tag{5.32}$$

Вычисление модифицированного действия

$$e^{-S[X|P;\{\xi_j\}]} = \langle \exp\left(-\frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu\right)\prod_j \exp\left(iP_j^\mu X_\mu(\xi_j)\right)\rangle_X \tag{5.33}$$

на соответствующей классической конфигурации можно пытаться интерпретировать как взаимодействие некоторых плоских волн-частиц с импульсами $\{P_j\}$ с мировой поверхностью струны - открытой или замкнутой, а значание вычисленного действия - как амплитуду рассеяния. Плохо только, что полученные нами выражения (5.4), (5.33) буквально не годятся - так как *явно* зависят от координат на мировом листе.

Проект наивного ответа - например в теории открытой струны

$$A(\{P_j\}) = \int \prod_j d\xi_j \exp(-S[X|P;\{\xi_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2} \int_{\mathbb{R}} d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \tag{5.34}$$

Вспомним теперь, что наблюдаемые величины в теории струн не должны зависеть от выбора координат на мировом листе. В частности это означает, что полученный интеграл должен как-то разумно вести себя при дробно-линейных преобразованиях

$$\xi_j \to \frac{a\xi_j + b}{c\xi_j + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{5.35}$$

Очевидно при этом

$$\begin{gathered} d\xi_j \to \frac{d\xi_j}{(c\xi_j + d)^2}, \qquad \forall j \\ \xi_j - \xi_k \to \frac{\xi_j - \xi_k}{(c\xi_j + d)(c\xi_k + d)}, \qquad \forall j,k \end{gathered} \tag{5.36}$$

то есть

$$\begin{gathered} \prod_j d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \to \prod_j d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \times \\ \times \prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^2} \times \prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^{2\alpha' P_j \sum_{k\neq j} P_k}} \end{gathered} \tag{5.37}$$

или, проще говоря, интегранд в (5.34) домножается на

$$\prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^{2(1-\alpha' P_j^2)}} \tag{5.38}$$

где мы использовали $\sum_k P_k = P_j + \sum_{k\neq j} P_k = 0$. Таким образом, интегранд оказывается инвариантным относительно дробно-линейных преобразований лишь когда “импульсы” всех внешних концов удовлетворяют условию массовой поверхности

$$\frac{1}{\alpha'} = P^\mu P_\mu = \mathbf{P}^2 - E^2 \tag{5.39}$$

то есть отвечают отрицательным квадратам массы или *тахионам.*

При этом интегральное выражение для амплитуды (5.34) оказывается “трехкратно переопределенным”. С учетом этого вырождения можно написать для N-точечной амплитуды

$$\begin{gathered} A(P_1,\ldots,P_N) \sim \int \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} d\xi_j \prod_{k=N-2,N-1,N} \delta(\xi_k - \xi_k^{(0)}) \left| \frac{\partial(\xi_{N-2},\xi_{N-1},\xi_N)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \right| \times \\ \times \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \end{gathered} \tag{5.40}$$

где

$$\delta\xi_k = \alpha + \beta\xi_k + \gamma\xi_k^2, \qquad k = N-2, N-1, N \tag{5.41}$$

представляют собой инфинитзимальную дробно-линейных форму преобразований, или попросту “забить” на лишние интегрирования в (5.34).

Для $N = 4$ удобно выбрать $\xi_2^{(0)} = 0$, $\xi_3^{(0)} = 1$, $\xi_3^{(0)} = \infty$ и интегрировать по $\xi_1 = \xi$, скажем в пределах $0 < \xi < 1$. Тогда результат будет иметь вид

$$\begin{gathered} A(P_1, \ldots, P_4) \sim \int_0^1 d\xi \xi^{2\alpha' P_1\cdot P_2}(1-\xi)^{2\alpha' P_2\cdot P_3} = \\ = \int_0^1 d\xi \xi^{-\alpha' s-2}(1-\xi)^{-\alpha' t-2} = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \\ = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} = A(s,t) \end{gathered} \tag{5.42}$$

где использована линейная функция $\alpha(x) = 1 + \alpha' x$ от переменных Мандельстама

$$\begin{aligned} s &= -(P_1+P_2)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2P_1\cdot P_2 \\ t &= -(P_2+P_3)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2P_2\cdot P_3 \end{aligned} \tag{5.43}$$

при $P^\mu P_\mu = \frac{1}{\alpha'}$. Формула (5.42) называется амплитудой Венециано, и пользуясь свойствами гамма-функции её можно представить в виде

$$\begin{gathered} A(s,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)\ldots(\alpha(t)+n)}{n!} \frac{1}{\alpha(s)-n} \sim \\ \sim \sum_{n\geq -1} \frac{C_n}{s-\frac{n}{\alpha'}}(t^{n+1}+\ldots) \end{gathered} \tag{5.44}$$

т.е. суммы по промежуточным резонансам с массами $-(P_1+P_2)^2 = M^2 = \frac{n}{\alpha'}$, $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Это естественно интерпретировать как наличие в спектре (открытой) струны частично-подобных состояний - начиная с тахиона, безмассового, и массивных состояний кратных массе Планка.