Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 2

Предфункторы и функторы

Определение (Ковариантный) предфунктор из предкатегории $\mathscr{C}$ в предкатегорию $\mathscr{D}$ - это пара функций

$\mathbf{F} = (F_0, F_1)$, где $F_0 : \mathrm{Ob}\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, $F_1 : \mathrm{Mor}\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{D}$, причем

если $\alpha \in \mathscr{C}(A,B)$, то $F_1(\alpha) \in \mathscr{D}(F_0(A),F_0(B))$.

Т.е. предфунктор “переводит начало в начало, а конец – в конец”.

Определение (Ковариантный) функтор из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ - это предфунктор

$\mathbf{F} = (F_0, F_1)$, переводящий тождественные стрелки в тождественные и сохраняющий композиции:

- $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$,
- $F_1(\alpha \cdot \beta) = F_1(\alpha) \cdot F_1(\beta)$.

Если отображения (F_0, F_1) – биекции, то функтор $\mathbf{F}$ называется *изоморфизмом категорий*.

Соглашения о записи.

Пишем $\mathbf{F}(\alpha)$ вместо $F_1(\alpha)$, $\mathbf{F}(A)$ вместо $F_0(A)$.

Запись $\mathbf{F}\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ означает, что $\mathbf{F}$ - функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$.

Еще примеры категорий

1. Категории, построенные из моноидов.

Пусть $(G, \cdot, e)$ - моноид, т. е. полугруппа с единицей. Ему соответствует категория

$\mathscr{C} = \mathrm{CM}(G, \cdot, e)$, у которой $\mathrm{Ob}\mathscr{C} = \{*\}$ (фиксированное 1-элементное множество),

$\mathrm{Mor}\mathscr{C} = G$, $e = 1_*$, а композиция совпадает с $\cdot$.

Для группы $(G, \cdot, e)$ получается категория, в которой все стрелки — изо.

2. Категории, построенные из предпорядков.

Пусть (X, R) - предпорядок, т. е. множество с рефлексивным транзитивным отношением. Ему соответствует категория

$\mathscr{C} = \mathrm{CPO}(X,R)$, у которой

$\mathrm{Ob}\mathscr{C} = X$, $\mathrm{Mor}\mathscr{C} = R$, $1_a = (a,a)$,

$\mathscr{C}(a,b) = \{(a,b)\}$, если aRb, иначе $\mathscr{C}(a,b) = \varnothing$;

композиция определяется так:

$$(a,b) \cdot (b,c) = (a,c).$$

Изоморфные объекты образуют *кластер,* т. е. класс эквивалентности по отношению (xRy & yRx).

R — частичный порядок (т. е. антисимметричный предпорядок), если и только если все кластеры одноэлементны.

<u>Предложение 2.1</u> Любая малая категория с одним объектом изоморфна категории вида $CM(G, \cdot, e)$.

<u>Предложение 2.2</u> Любая малая категория $\mathscr{C}$, в которой каждое множество $\mathscr{C}(a,b)$ содержит не более одной стрелки, изоморфна категории вида $CPO(X,R)$.

<u>Пример 1</u> *Тождественный функтор* $1_{\mathscr{C}}$ все объекты и морфизмы категории $\mathscr{C}$ переводит в себя. Это изоморфизм $\mathscr{C}$ на $\mathscr{C}$.

<u>Пример 2</u> Если $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$, то имеется *функтор включения* $\mathbf{i}_{\mathscr{C}\mathscr{D}} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$, который все объекты и морфизмы категории переводит $\mathscr{C}$ в себя.

<u>Пример 3</u> Если $\mathscr{C}$ - категория каких-нибудь алгебраических структур - например, групп, (или колец, модулей и т. д.) и их гомоморфизмов), то имеется *забывающий функтор*

$\mathbf{U} : \mathscr{C} \rightsquigarrow SET$. Он переводит каждый объект $\mathscr{C}$ в соответствующее множество (его носитель), а каждый гомоморфизм в себя.

Аналогичный функтор можно построить для категории топологических пространств и непрерывных отображений и во многих других случаях.

<u>Лемма 2.3</u> Функтор переводит изострелки в изострелки.

Контравариантные функторы

<u>Определение</u> *Контравариантный функтор* (или *кофунктор*) из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ - это функтор из $\mathscr{C}^{\circ}$ в $\mathscr{D}$.

Таким образом, это пара вида (F_0,F_1), где $F_0 : Ob\mathscr{C} \to Ob\,\mathscr{D}$, $F_1 : Mor\mathscr{C} \to Mor\,\mathscr{D}$, причем

- если $\alpha \in \mathscr{C}(A,B)$, то $F_1(\alpha) \in \mathscr{D}(F_0(B),F_0(A))$.

Т.е. (с точки зрения $\mathscr{C}$) кофунктор “переводит начало в конец, а конец – в начало”.

- $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$,
- $F_1(\alpha \cdot \beta) = F_1(\beta) \cdot F_1(\alpha)$.

Категория CAT

Объекты этой категории — малые категории; стрелки - функторы между ними. Тождественные стрелки — это тождественные функторы, а композиция определяется понятным образом: $(F_0,F_1)\cdot(G_0,G_1) = (F_0\cdot G_0,\ F_1\cdot G_1)$;
легко проверить, что композиция функторов — функтор.
Можно также проверить, что изострелки в CAT — это в точности изоморфизмы категорий.

Hom-функторы

Для каждого объекта A категории $\mathscr{C}$ можно построить ковариантный функтор $\mathscr{C}(A, -)$ (или $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$): $\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{SET}$.

Он переводит каждый объект X в $\mathscr{C}(A, X)$, а стрелку

$\alpha: X \to Y$ в отображение $\alpha_*: \mathscr{C}(A, X) \to \mathscr{C}(A,Y)$,

такое что $\alpha_*(\beta) = \beta\cdot\alpha$.

Легко проверить, что получается функтор.
Теперь, если перейти к двойственной категории, получим контравариантный Hom-функтор:

$\mathscr{C}(-, A) := \mathscr{C}^{\circ}(A, -)$.

Он переводит объект X в $\mathscr{C}^{\circ}(A, X) = \mathscr{C}(X, A)$, а стрелку

$\alpha: X \to Y$ в отображение $\alpha^*: \mathscr{C}^{\circ}(A,X) \to \mathscr{C}^{\circ}(A,Y)$, где $\alpha^*(\beta) = \beta\cdot\alpha$

(и все это в $\mathscr{C}^{\circ}$).

Т.е. если вернуться к $\mathscr{C}$, имеем:

стрелка $\alpha: Y \to X$ переходит в $\alpha^*: \mathscr{C}(X,A) \to \mathscr{C}(Y,A)$, где $\alpha^*(\beta) = \alpha\cdot\beta$.