Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 3

Вложения категорий и унивалентные функторы

<u>Определение</u> Функтор $\mathbf{F} = (F_0,F_1)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ называется *вложением категорий,* если отображение F_1 инъективно (“ $\mathbf{F}$ инъективен на стрелках”).

Функтор $\mathbf{F} = (F_0,F_1)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ называется *унивалентным,* если отображение F_1 инъективно на каждом классе $\mathscr{C}(A,B)$ (“ $\mathbf{F}$ инъективен на стрелках между A и B”).

Функтор $\mathbf{F} = (F_0,F_1)$ называется *инъективным на объектах,* если F_0 инъективно.

<u>Пример 1</u> Изоморфизм категорий является вложением.

<u>Пример 2</u> Функтор включения $\mathbf{i}_{\mathscr{C}\mathscr{D}}$ является вложением.

<u>Пример 3</u> Забывающий функтор унивалентен (каждая стрелка переходит в себя), но не инъективен на объектах.

<u>Лемма 3.1</u> Функтор является вложением категорий, если и только если он унивалентен и инъективен на объектах.

Полные функторы

<u>Определение</u> Функтор $\mathbf{F} = (F_0,F_1)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ называется *полным,* если отображение F_1 сюръективно на каждом классе $\mathscr{C}(A,B)$.

<u>Пример 1</u> Функтор включения $\mathbf{i}_{\mathscr{C}\mathscr{D}}$ является полным вложением тогда и только тогда, когда $\mathscr{C}$ полная подкатегория $\mathscr{D}$.

<u>Пример 2</u> Забывающий функтор не является полным.

<u>Предложение 3.2</u> Функтор $\mathbf{F}\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$является (полным) вложением, если и только если он явлется изоморфизмом на (полную) подкатегорию в $\mathscr{D}$.

<u>Предложение 3.3</u> Полный унивалентный функтор отражает изострелки:
если $\mathbf{F}(\alpha)$ - изострелка, то α - изострелка.

Конкретизируемые категории

<u>Определение</u> Категория называется *конкретизируемой*, если она вложима в SET.

<u>Теорема 3.4</u> Всякая малая категория конкретизируема.

Идея доказательства. Вложение $\mathbf{F}\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{SET}$ похоже на Hom-функтор:

$\mathbf{F}(A) := \bigcup_X \mathscr{C}(X,A)$; для $\alpha\colon A \to B$ полагаем $\mathbf{F}(\alpha) = \alpha_*\colon \beta \mapsto \beta \cdot \alpha$.

Лекция 4

Эквивалентность категорий

Определение Функтор $\mathbf{F}: \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ называется *плотным,* если всякий объект из $\mathscr{D}$ изоморфен объекту вида $\mathbf{F}(X)$.

Определение Функтор называется *эквивалентностью,* если он полный, унивалентный и плотный.

Лемма 4.1 Композиция эквивалентностей - эквивалентность.

В действительности легко проверить, что каждое из свойств: плотность, унивалентность, полнота – сохраняется при композиции.

Определение Категория называется *скелетальной*, если в ней любые два изоморфных объекта совпадают.

Определение *Скелетом* категории $\mathscr{C}$ называется ее полная подкатегория $\mathscr{D}$, которая скелетальна, причем каждый объект из $\mathscr{C}$ изоморфен некоторому объекту из $\mathscr{D}$.

Иначе говоря: $\mathscr{D}$ - скелетальная подкатегория и функтор включения $\mathbf{i}_{\mathscr{D}\mathscr{C}}$ - эквивалентность.

Предложение 4.2 Любая категория имеет скелет.

Для доказательства нужна аксиома выбора для классов, которая формулируется следующим образом.

Пусть R – отношение эквивалентности на классе X (т.е. R – подкласс X^2 со свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности). Тогда существует класс $Y \subset X$, пересекающий каждый класс эквивалентности по R в единственной точке:

$$\forall X \forall R(R \text{ – отн. эквивалентности на } X \rightarrow \exists Y \subset X\ \forall x \in X\ \exists! y \in Y\ (x,y) \in R).$$

Это утверждение выполняется, если класс всех множеств V можно вполне упорядочить: тогда достаточно взять $Y=\{\min R(x) \mid x \in X\}$, где $R(x)=\{y \mid (x,y)\in R\}$ – класс эквивалентности x, а min берется относительно данного вполне упорядочения V.

Для доказательства 4.2 надо рассмотреть отношение изоморфности на классе $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ и взять по 1 элементу из каждого класса изоморфных объектов. Это дает нам класс $\mathrm{Ob}\mathscr{D}$. Затем надо построить полную подкатегорию $\mathscr{C}$ с этим классом объектов.

Предложение 4.3 Любая эквивалентность скелетальных категорий является изоморфизмом.

Предложение 4.4 Пусть $\mathscr{C}_0$ – скелет категории $\mathscr{C}$. Тогда существуют эквивалентности $\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_0, \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_0$

Теорема 4.5 (1) Все скелеты одной категории изоморфны.

(2) Существует эквивалентность $\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D} \Leftrightarrow$ скелеты $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ изоморфны.

Определение Категории называются *эквивалентными*, если между ними имеется эквивалентность.

Из теоремы 4.5 следует, что если между категориями есть функтор-эквивалентность в одну сторону, то есть и в другую.

Следствие 4.6 Эквивалентность категорий является “отношением эквивалентности” (т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности).