Листок 04. Срок сдачи 15 ноября 2015

Для сдачи каждой из задач 4.1 — 4.5 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

04.01. Канторово множество. Рассмотрим последовательность открытых множеств $U_n \subset [0;1]$ и замкнутых множеств $C_n = [0;1] \setminus U_n$, определенную следующим образом. $U_1 = (1/3; 2/3)$ — надо понимать так, что мы разделили отрезок $[0;1]$ на три равные части и выкинули среднюю треть, осталось замкнутое множество $C_1 = [0;1/3] \cup [2/3;1]$, состоящее из двух отрезков. Затем делаем ту же операцию с этими отрезками: делим каждый на три равные части и добавляем в U_2 две средние трети: $U_2 = U_1 \cup (1/9; 2/9) \cup (7/9; 8/9)$. Тогда C_2 состоит уже из четырех отрезков, и следующее открытое множество U_3 получится добавлением к U_2 уже четырех интервалов, являющихся средними третями этих отрезков. Таким образом, на k-ом шаге замкнутое множество C_k будет состоять из 2^k отрезков, и тогда открытое множество U_{k+1} будет получаться из U_k добавлением к нему 2^k интервалов, являющихся средними третями отрезков, составляющих множество C_k. По определению, канторово множество (далее КМ), это $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

а) Докажите, что КМ состоит из точек отрезка, в которые можно представить конечной или бесконечной троичной дробью, в записи которой не используется цифра 1.

б) Докажите,что КМ замкнуто и не содержит изолированных точек, т.е. каждая точка КМ является его предельной точкой.

в) Докажите, что КМ имеет мощность континуума;

г) Докажите, что КМ нигде не плотно, т.е. любой интервал содержит меньший интервал, не пересекающийся с КМ.

04.02. Канторова лестница. Определим функцию φ на множестве $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ из предыдущей задачи следующим образом. Множество U_{k+1} получалось из U_k добавлением 2^k непересекающихся интервалов, которые мы обозначим слева направо $I_1, \dots I_{2^k}$. Тогда определим функцию φ на интервале I_m константой, равной $\frac{2m-1}{2^{k+1}}$.

а) Докажите, что функцию φ можно единственным образом продолжить до непрерывной монотонной функции, заданной на всем отрезке $[0;1]$.

б) Докажите, что если $x \in C$, то $\varphi(x)$ можно определить следующим образом. Согласно 04.01а x можно представить бесконечной троичной дробью $x = 0,\alpha_1\alpha_2\dots$, где все α_i нули или двойки. Тогда *двоичная* дробь $0,\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\dots$ есть $\varphi(x)$.

в) В каких точках дифференцируема функция $\varphi(x)$?

04.03. Простейшие ряды. Пусть a_n некоторая последовательность действительных чисел. Рассмотрим последовательность $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Если последовательность S_n имеет предел, то говорят, что *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ *сходится*, а $\lim_{n\to\infty} S_n$ называется *его суммой*. Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует (или бесконечен), то говорят, что *ряд расходится*.

а) Докажите, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ расходится;

б) Докажите, что ряд из обратных квадратов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ сходится;

в) Докажите, что ряд Лейбница $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится;

г) Докажите, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ составлен из положительных элементов и сходится;

д) Выведите из предыдущей задачи существование *постоянной Эйлера*

$$C = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n).$$

04.04. Выпуклые функции. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*) на промежутке I, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

В случае, если выполнено обратное неравенство, функцию называют *вогнутой* или *выпуклой вверх.* Докажите, что

а) график выпуклой непрерывно дифференцируемой функции лежит выше любой касательной к нему;

б) функция выпукла тогда и только тогда, когда для любых $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b$ и любых неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых равна единице, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n);$$

в) выпуклая на интервале функция непрерывна на нём;

г) выпуклая на интервале функция имеет односторонние производные в каждой точке отрезка;

д) у выпуклой функции односторонние производные возрастают, в каждой точке производная слева не превосходит производную справа;

е) локальный минимум выпуклой на отрезке функции является её глобальным минимумом на этом же отрезке;

ж) дважды дифференцируемая функция выпукла на интервале, тогда и только тогда, когда её вторая производная неотрицательна на этом интервале.

04.05. Неравенства.

а) Докажите, что функции $x \mapsto e^x$ и $x \mapsto -\ln x$ выпуклы на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$, соответственно.

б) Выведите отсюда неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$;

в) Докажите, что при $p > 1$ функция $x \mapsto x^p$ выпукла вниз при $x \geqslant 0$;

г) Выведите отсюда неравенство Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p > 1$;

д) Докажите неравенство треугольника

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

04.06.* Даны два коммутирующих (т.е. $f(g(x)) = g(f(x))$ для любого x) непрерывных отображения f и g отрезка в себя, причём одно из них монотонно. Докажите, что у них есть общая неподвижная точка, т.е. существует такая точка α, что $f(\alpha) = g(\alpha) = \alpha$.

04.07.* Постройте нигде не плотное совершенное множество, не содержащее рациональных точек. (Множество называется совершенным, если оно замкнуто и не содержит изолированных точек, т.е. все его точки являются его предельными точками.)

04.08.* Докажите, что любое открытое множество на прямой есть объединение не более чем счетного набора непересекающихся интервалов и лучей.