

1. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА. ЛИСТОК 4.

Задачи из контрольной работы. Решить все те задачи, которые не были решены, или были решены неправильно во время контрольной. Срок сдачи - 17 ноября.

1. Найдите решение задачи Коши:  $x'' + 2x' = \varphi(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ , где  $\varphi(t) = e^{-t}$  при  $0 < t < 1$  и  $\varphi(t) = 0$  при  $t > 1$ .
2. Решите краевую задачу  $x'' - x = f(t)$ ,  $x(0) = x(1) = 0$ . Выпишите соответствующую функцию Грина.
3. Найдите преобразование Фурье  $F[(x^2 + a^2)^{-1}]$ .
4. Последовательность  $f_n \in \mathcal{D}'$  обобщенных функций сходится к обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'$ . Докажите:
  - (1) что последовательность  $f'_n$  также сходится в  $\mathcal{D}'$ ;
  - (2) что последовательность  $g(x)f_n$  сходится, если  $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ;
  - (3) укажите, какие достаточно сделать уточнения (если они необходимы), чтобы такие же утверждения выполнялись в  $\mathcal{S}'$ .
5. Докажите равенство
$$a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x), \quad a \in C^1(\mathbb{R})$$
6. Вычислите  $(\sin |x|)''$  в смысле обобщенных функций.
7. Покажите, что при произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  функция  $u(x) = C_1 + C_2\theta(x) + \log |x|$  является решением уравнения  $xu'(x) = 1$  в обобщенных функциях. Докажите, что это все решения уравнения  $xu'(x) = 1$ .