Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2015)

40. Рассмотрим следующие категории: VEC(**R**) (категория векторных пространств над **R** и линейных отображений), GROUP (категория групп и гомоморфизмов), TOP (категория топологических пространств и непрерывных отображений). Докажите, что никакая из этих категорий не эквивалентна своей двойственной.

41. Рассмотрим категорию Mat(K), объекты которой – натуральные числа, объект 0 – начальный и финальный, морфизмы из m в n – (n x m)-матрицы над полем K, композиция морфизмов A·B между ненулевыми объектами – это произведение матриц BA (а с нулевым объектом и так все ясно). Докажите, что Mat(K) эквивалентна категории VEC(K) векторных пространств над K и линейных отображений.

42. (a) Докажите, что если в категории существуют произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любых 3 объектов, причем AxBxC ≅ (AxB)xC ≅ Ax(BxC).

(b) Докажите, что если в категории существует финальный объект и произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любого конечного семейства объектов.

43. Докажите, что изоморфизм категорий сохраняет пределы.

44. Докажите, что если функтор сохраняет произведения и уравнители, то он сохраняет пределы.

45. Пусть $(X, \alpha_i, A_i)_{i\in I}$ – конус в категории $\mathscr{C}$ над семейством объектов $(A_i)_{i\in I}$. Докажите, что если для любого объекта A категории $\mathscr{C}$ конус $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X), (\alpha_i)_*, \mathrm{Hom}(A,A_i))$ является произведением в SET, то $(X, \alpha_i, A_i)_{i\in I}$ – произведение в $\mathscr{C}$.

46. Для категории $\mathscr{C}$ и ее объекта A рассмотрим $\mathscr{C}\downarrow A$ – категорию конусов над A (как диаграммой из одного объекта без стрелок).

Докажите, что если $\mathscr{C}$ полна, то и любая категория $\mathscr{C}\downarrow A$ полна.