QED

I. Тождественные частицы

Рассмотрим физическую систему, состоящую из N одинаковых (тождественных) частиц. Наперво нужно пояснить слова „одинаковые“, „тождественные“. Физическая система определяется гамильтонианом, в котором каждая частица задается каноническими переменными и внутренними степенями свободы (спин, например) – $\hat{\vec{q}}_\alpha, \hat{\vec{p}}_\alpha, \hat{\vec{s}}_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, N$. Кроме того, гамильтониан содержит некоторые параметры – массы, заряды и тому подобное. Так вот: физическая система состоит из тождественных частиц, если гамильтониан

$$\hat{H} = H(\hat{\vec{q}}_1, \hat{\vec{p}}_1, \hat{\vec{s}}_1, \dots, \hat{\vec{q}}_\alpha, \hat{\vec{p}}_\alpha, \hat{\vec{s}}_\alpha, \dots, \hat{\vec{q}}_\beta, \hat{\vec{p}}_\beta, \hat{\vec{s}}_\beta, \dots, \hat{\vec{q}}_N, \hat{\vec{p}}_N, \hat{\vec{s}}_N)$$

при любой замене $\hat{\vec{q}}_\alpha, \hat{\vec{p}}_\alpha, \hat{\vec{s}}_\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\vec{q}}_\beta, \hat{\vec{p}}_\beta, \hat{\vec{s}}_\beta$ остается прежним.

Полный набор для такой системы выберем как объединяющий полные наборы для каждой частицы в отдельности $(\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_N)$, где, например, $\hat{\eta}_\alpha = (\hat{\vec{q}}_\alpha, \hat{s}_{\alpha,z}),\ \alpha = 1, \dots, N$.

Состояния нашей физической системы $|\phi\rangle$ будем представлять в виде комплекснозначной с суммируемым квадратом функции

$$\phi(\eta_1, \dots, \eta_N) = \langle \eta_1 | \otimes \dots \otimes \langle \eta_N | \phi \rangle,$$

где $|\eta_\alpha\rangle,\ \alpha = 1, \dots, N,$ – собственные состояния полного набора наблюдаемых $\hat{\eta}_\alpha$ одной частицы.

> Принцип тождественности частиц.
>
> Состояние $\phi(\eta_1, \dots, \eta_\alpha, \dots, \eta_\beta, \dots, \eta_N)$ физической системы тождественных частиц *не изменяется* при любой замене $\eta_\alpha \ \Leftrightarrow\ \eta_\beta$ (состояние физической системы не изменяется при перестановки двух тождественных частиц).

Это означает, что

$$\phi(\eta_1, \dots, \eta_\beta, \dots, \eta_\alpha, \dots, \eta_N) = C \cdot \phi(\eta_1, \dots, \eta_\alpha, \dots, \eta_\beta, \dots, \eta_N), \text{причем } |C| = 1.$$

Применяя операцию перестановки повторно, получаем $C^2 = 1$ или $C = \pm 1$.

So: принцип тождественности частиц требует, чтобы волновая функция системы таких частиц была либо *симметрична*

$$\phi(\eta_1, \ldots, \eta_\alpha, \ldots, \eta_\beta, \ldots, \eta_N) = +\phi(\eta_1, \ldots, \eta_\beta, \ldots, \eta_\alpha, \ldots, \eta_N), \quad \underline{\text{бозоны}}$$

либо *антисимметрична*

$$\phi(\eta_1, \ldots, \eta_\alpha, \ldots, \eta_\beta, \ldots, \eta_N) = -\phi(\eta_1, \ldots, \eta_\beta, \ldots, \eta_\alpha, \ldots, \eta_N), \quad \underline{\text{фермионы}}$$

при перестановки любых двух аргументов.

В квантовой теории поля есть замечательная теорема, которая утверждает, что *бозоны – это частицы с целым спином*, а *фермионы – частицы с полуцелым спином* (теорема о связи спина со статистикой). Имеется в виду локальная, лоренц-инвариантная, с единственным вакуумом теория поля, в которой выполнено условие микропричинности.

То есть, локальные плотности наблюдаемых $\hat{O}(t, \vec{x})$

$$\hat{\mathcal{O}} = \int \mathrm{d}\vec{x}\, \hat{O}(t, \vec{x})$$

должны коммутировать для пространственно-подобных интервалов

$$[\hat{O}(t_1, \vec{x}_1), \hat{O}(t_2, \vec{x}_2)] = 0, \quad \text{если } (t_1 - t_2)^2 < (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2.$$

Рассмотрим две невзаимодействующие тождественные частицы с гамильтонианом

$$\hat{H} = h(\hat{\vec{q}}_1, \hat{\vec{p}}_1, \hat{\vec{s}}_1) + h(\hat{\vec{q}}_2, \hat{\vec{p}}_2, \hat{\vec{s}}_2).$$

Задача на собственные значения и состояния гамильтониана

$$\hat{H}\phi_N(\eta_1, \eta_2) = \big(h(\hat{\vec{q}}_1, \hat{\vec{p}}_1, \hat{\vec{s}}_1) + h(\hat{\vec{q}}_2, \hat{\vec{p}}_2, \hat{\vec{s}}_2)\big)\phi_N(\eta_1, \eta_2) = E_N \phi_N(\eta_1, \eta_2).$$

Эта задача допускает разделение переменных

$$\phi_N(\eta_1, \eta_2) = \phi_{n_1}(\eta_1) \cdot \phi_{n_2}(\eta_2), \quad \frac{\hat{h}\phi_{n_1}(\eta_1)}{\phi_{n_1}(\eta_1)} + \frac{\hat{h}\phi_{n_2}(\eta_2)}{\phi_{n_2}(\eta_2)} = \epsilon_{n_1} + \epsilon_{n_2} = E_N.$$

Однако, полученная собственная функция не обладает нужными свойствами. Она не симметрична и не антисимметрична по отношению к перестановке аргументов. Ситуацию спасает то обстоятельство, что состояние с данным значением энергии, как минимум, двукратно вырождено. Действительно, состояние $\varphi_N(\eta_1, \eta_2) = \phi_{n_2}(\eta_1)\phi_{n_1}(\eta_2)$ тоже собственное с энергией $\epsilon_{n_2} + \epsilon_{n_1} = E_N$. А уже используя эти *два* состояния, нетрудно получить состояние для бозонов

$$\phi^B_{N=\{n_1,n_2\}}(\eta_1,\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\phi_{n_1}(\eta_1)\phi_{n_2}(\eta_2) + \phi_{n_1}(\eta_2)\phi_{n_2}(\eta_1)\big],\ n_1 \neq n_2,$$

$$\phi^B_{N=\{n,n\}}(\eta_1,\eta_2) = \phi_n(\eta_1)\phi_n(\eta_2)\ -\ \text{бозоны}$$

и фермионов

$$\phi^F_{N=\{n_1,n_2\}}(\eta_1,\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\phi_{n_1}(\eta_1)\phi_{n_2}(\eta_2) - \phi_{n_1}(\eta_2)\phi_{n_2}(\eta_1)\big]\ -\ \text{фермионы.}$$

Из последней формулы следует широко известный в узких кругах *принцип запрета Паули*: два невзаимодействующих фермиона (электрона, например) не могут находиться в одинаковых одночастичных состояниях ($n_1 \neq n_2$). Состояние с $n_1 = n_2$ просто не существует $\phi^F = 0$.

Отмеченные особенности систем тождественных невзаимодействующих частиц легко распространяются на число частиц большее, чем 2.

Формализм теории с любым числом тождественных частиц.

Пусть пространство состояний системы из N частиц – $\mathcal{H}^N$. Состояние системы – комплекснозначная функция с суммируемым квадратом $\phi(\eta_1,\ldots,\eta_N) \in \mathcal{H}^N$. Система из N тождественных частиц описывается или подпространством $\mathcal{H}^N_B \subset \mathcal{H}^N$, состоящем из симметричных функций (бозоны), или подпространства $\mathcal{H}^N_F \subset \mathcal{H}^N$ антисимметричных функций (фермионы).

Система же, состоящая из переменного числа бозонов или фермионов, описывается с помощью пространства состояний

$$\mathcal{H}_B = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^N_B, \quad \text{или} \quad \mathcal{H}_F = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^N_F.$$

Строим базис таких пространств. Пусть $|\phi_n\rangle, n = 0, 1, \ldots$ – собственные состояния полного одночастичного набора наблюдаемых, не обязательно $\hat{\eta}$. $\phi_n(\eta) = \langle\eta|\phi_n\rangle$ – полная ортонормированная система функций. Тогда в $\mathcal{H}^N$ можно задать базис

$$\phi_{n_1}(\eta_1)\phi_{n_2}(\eta_2)\ldots\phi_{n_N}(\eta_N) = \prod_{k=1}^{N}\phi_{n_k}(\eta_k),$$

$n_1, n_2, \ldots, n_N$ - все возможные выборки из индексов собственных состояний $\phi_n(\eta),\ n = 0, 1, \ldots$.

В пространствах $\mathcal{H}_B^N$ и $\mathcal{H}_F^N$ базисы (ненормированные) получаются действием симметризующего оператора $\hat{S}_N$ или антисимметризующего оператора $\hat{A}_N$ по всем аргументам η на базис в $\mathcal{H}^N$

$$\hat{S}_N \prod_{k=1}^{N} \phi_{n_k}(\eta_k), \quad \hat{A}_N \prod_{\substack{k=1 \\ n_1<n_2<\cdots<n_N}}^{N} \phi_{n_k}(\eta_k).$$

Чтобы понять как действуют вновь введенные операторы, нужен небольшой экскурс в простые свойства перестановок.

- Перестановка связывает совокупность N упорядоченных объектов $\eta_1, \ldots, \eta_N$ с той же совокупностью, расположенной в другом порядке $\eta_{\alpha_1}, \ldots, \eta_{\alpha_N}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ - за исключением порядка, то же самое множество, что и $1, \ldots, N$.

- Перестановку можно записывать в виде

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \end{pmatrix},$$

причем $P\eta_1 = \eta_{\alpha_1}, \ldots, P\eta_N = \eta_{\alpha_N}$.

- Перестановка столбцов не меняет перестановки.

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_N \end{pmatrix},$$

тогда определено произведение

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_N \end{pmatrix}.$$

Легко определить тождественную перестановку и обратную. Совокупность всех перестановок N объектов образуют группу (симметрическая группа).

- Транспозиция - перестановка вида

$$P_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \alpha & \cdots & \beta & \cdots & N \\ 1 & 2 & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & N \end{pmatrix}.$$

- Каждая перестановка может быть разбита на произведение транспозиций. Четность числа транспозиций, на которые разбита перестановка, однозначна. Таким образом, перестановку P можно охарактеризовать ее четностью δ_P, равной $+1$ для четной перестановки, и -1 для нечетной.

Теперь легко определить

$$\hat{S}_N f(\eta_1, \dots, \eta_N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N!} \sum_P f(P\eta_1, \dots, P\eta_N),$$

$$\hat{A}_N f(\eta_1, \dots, \eta_N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N!} \sum_P \delta_P f(P\eta_1, \dots, P\eta_N),$$

где суммирование идет по $N!$ элементам симметрической группы.
Полученные действием операторов $\hat{S}_N$ и $\hat{A}_N$ базисы можно записывать в виде

$$|N_0, N_1, \dots, N_n, \dots\rangle, \tag{1}$$

в этом выражении $N_n,\ n = 0, 1, \dots,$ - число функций $\phi_n(\eta)$ в выписанных произведениях. Очевидно, что N_n может принимать значения $0, 1, 2, \dots$ для бозонов и $0, 1$ для фермионов, так что

$$\sum_{n=0} N_n = N.$$

Последнее ограничение можно снять, если перейти в пространства состояний $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_F$. Описанная конструкция – *представление чисел заполнения.*

Введем операторы, позволяющие путешествовать в пространстве состояний. Это операторы рождения и уничтожения. Для пространства $\underline{\mathcal{H}_B}$

$$\hat{a}_n^+ |N_0, N_1, \dots, N_n, \dots\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{N_n + 1}\, |N_0, N_1, \dots, N_n + 1, \dots\rangle,$$

$$\hat{a}_n |N_0, N_1, \dots, N_n, \dots\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{N_n}\, |N_0, N_1, \dots, N_n - 1, \dots\rangle.$$

Можно показать, что эти операторы подчиняются коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_n^+] = \delta_{mn}, \quad [\hat{a}_m, \hat{a}_n] = [\hat{a}_m^+, \hat{a}_n^+] = 0$$

и сопряжены друг другу (вспоминаем гармонический осциллятор).
Определим вакуумное состояние следующего вида

$$|0\rangle = |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle,$$

тогда состояние (1) представимо в виде

$$|N_0, N_1, \dots, N_n, \dots\rangle = (\hat{a}_0^+)^{N_0} (\hat{a}_1^+)^{N_1} \dots (\hat{a}_n^+)^{N_n} \dots |0\rangle = \prod_{n \in O} \hat{a}_n^+ |0\rangle ,$$

где $O = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ - множество занятых одночастичных состояний с учетом кратности их заполнения (то есть в множестве O могут быть одинаковые элементы).

Пусть $\hat{h} = h(\hat{\vec{q}}, \hat{\vec{p}}, \hat{\vec{s}})$ - одночастичный гамильтониан. Посмотрим как на N-частичное состояние действует гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \sum_{m=1}^{N} \hat{h}_m.$$

Очевидно, что $[\hat{H}_0, \hat{S}_N] = 0$, поэтому

$$\hat{H}_0 |\dots, N_n, \dots\rangle \;\Rightarrow\; \hat{S}_N \sum_{m=1}^{N} \hat{h}_m \prod_{k=1}^{N} \phi_{n_k}(\eta_k) = \hat{S}_N \sum_{m=1}^{N} \hat{h}_m \phi_{n_m}(\eta_m) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{N} \phi_{n_k}(\eta_k)$$

Воспользуемся соотношением

$$\hat{h} |\phi_{n_m}\rangle = \sum_{\alpha,\beta=0} |\phi_\alpha\rangle \langle\phi_\alpha| \hat{h} |\phi_\beta\rangle \langle\phi_\beta| \phi_{n_m}\rangle \Rightarrow \sum_{\alpha,\beta=0} h_{\alpha\beta} \delta_{\beta,n_m} \phi_\alpha(\eta_m)$$

и найдем, что

$$\hat{H}_0 \prod_{n \in O} \hat{a}_n^+ |0\rangle \;\Leftarrow\; \hat{H}_0 |\dots, N_n, \dots\rangle \;\Rightarrow\; \sum_{\alpha,\beta=0} h_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^+ \sum_{m=1}^{N} \delta_{\beta,n_m} \prod_{\substack{n \in O \\ n \neq n_m}} \hat{a}_n^+ |0\rangle . \tag{2}$$

Интересная цепочка равенств

$$\hat{a}_\beta \prod_{n \in O} \hat{a}_n^+ = \hat{a}_\beta \hat{a}_{n_1}^+ \hat{a}_{n_2}^+ \dots \hat{a}_{n_N}^+ = \delta_{\beta,n_1} \hat{a}_{n_2}^+ \dots \hat{a}_{n_N}^+ + \hat{a}_{n_1}^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_{n_2}^+ \dots \hat{a}_{n_N}^+ =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \delta_{\beta,n_m} \prod_{\substack{n \in O \\ n \neq n_m}} \hat{a}_n^+ + \Big(\prod_{n \in O} \hat{a}_n^+\Big) \hat{a}_\beta.$$

Сравнивая найденное с (2) и используя, что $\hat{a}_\beta |0\rangle = 0$, получаем

$$\hat{H}_0 |\dots, N_n, \dots\rangle = \sum_{\alpha,\beta=0} h_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta |\dots, N_n, \dots\rangle .$$

Оператор двухчастичного взаимодействия

$$\hat{V} = \sum_{\substack{l,m=1 \\ l<m}}^{N} \hat{\nu}_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^{N} \hat{\nu}_{lm}$$

переписывается в виде

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \beta_1,\beta_2=0}} \nu_{\alpha_2\alpha_1,\beta_1\beta_2}\hat{a}^+_{\alpha_2}\hat{a}^+_{\alpha_1}\hat{a}_{\beta_1}\hat{a}_{\beta_2}.$$

Вывод:

$$\hat{V}\left|\ldots,N_n,\ldots\right\rangle \;\Rightarrow\; \hat{S}_N\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{N}\hat{\nu}_{lm}\prod_{k=1}^{N}\phi_{n_k}(\eta_k) = \hat{S}_N\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{N}\hat{\nu}_{lm}\phi_{n_l}(\eta_l)\phi_{n_m}(\eta_m)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq l,m}}^{N}\phi_{n_k}(\eta_k),$$

$$\hat{\nu}_{lm}\phi_{n_l}(\eta_l)\phi_{n_m} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \beta_1,\beta_2=0}}\nu_{\alpha_2\alpha_1,\beta_1\beta_2}\phi_{\alpha_1}(\eta_l)\phi_{\alpha_2}(\eta_m)\delta_{n_l,\beta_1}\delta_{n_m,\beta_2},$$

$$\nu_{\alpha_2\alpha_1,\beta_1\beta_2} = \left\langle\alpha_2\right|\otimes\left\langle\alpha_1\right|\hat{\nu}\left|\beta_1\right\rangle\otimes\left|\beta_2\right\rangle,$$

$$\hat{V}\left|\ldots,N_n,\ldots\right\rangle = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \beta_1,\beta_2=0}}\nu_{\alpha_2\alpha_1,\beta_1\beta_2}\hat{a}^+_{\alpha_1}\hat{a}^+_{\alpha_2}\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{N}\delta_{n_l,\beta_1}\delta_{n_m,\beta_2}\prod_{\substack{n\in O\\ n\neq n_l,n_m}}\hat{a}^+_n\left|0\right\rangle.$$

$$\hat{a}_{\beta_1}\hat{a}_{\beta_2}\prod_{n\in O}\hat{a}^+_n\left|0\right\rangle = \hat{a}_{\beta_1}\sum_{m=1}^{N}\delta_{n_m,\beta_2}\prod_{\substack{n\in O\\ n\neq n_m}}\hat{a}^+_n\left|0\right\rangle = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}\delta_{n_l,\beta_1}\sum_{m=1}^{N}\delta_{n_m,\beta_2}\prod_{\substack{n\in O\\ n\neq n_m,n_l}}\hat{a}^+_n\left|0\right\rangle.$$

Для фермионов $\underline{\mathcal{H}_F}$ числа заполнения могут принимать только два значения 0 или 1. Пусть $O = \{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$ - упорядоченное ($n_k < n_{k+1}$) множество занятых одночастичных состояний. Тогда операторы рождения и уничтожения определяются вот так

$$\hat{c}^+_n|\underbrace{\ldots,1_{n_k},0,\ldots,0}_{k\text{ единиц}},N_n,\ldots\rangle = (-1)^k(1-N_n)\left|\ldots,1_{n_k},0,\ldots,0,N_n+1,\ldots\right\rangle,$$

$$\hat{c}_n|\underbrace{\ldots,1_{n_k},0,\ldots,0}_{k\text{ единиц}},N_n,\ldots\rangle = (-1)^k N_n\left|\ldots,1_{n_k},0,\ldots,0,N_n-1,\ldots\right\rangle.$$

Эти операторы также сопряжены друг другу и подчиняются антикоммутационным соотношениям

$$[\hat{c}_n,\hat{c}^+_m]_+ = \delta_{nm},\quad [\hat{c}_n,\hat{c}_m]_+ = [\hat{c}^+_n,\hat{c}^+_m]_+ = 0.$$

Базисное N-частичное состояние

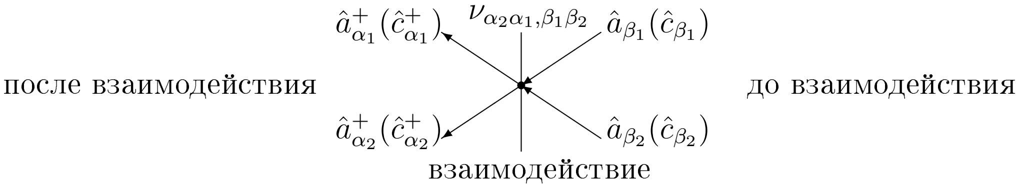
$$\left|\ldots,1_{n_1},\ldots,1_{n_k},\ldots,1_{n_N},\ldots\right\rangle = \hat{c}^+_{n_1}\ldots\hat{c}^+_{n_k}\ldots\hat{c}^+_{n_N}\left|0\right\rangle = \prod_{\substack{n\in O\\ n_1<n_2<\cdots<n_N}}\hat{c}^+_n\left|0\right\rangle,$$

здесь $\left|0\right\rangle = \left|0,\ldots,0,\ldots\right\rangle$ - вакуумное состояние.

Гамильтониан с двухчастичным взаимодействием

$$\hat{H} = \sum_{\alpha,\beta=0} h_{\alpha\beta} \hat{c}^+_\alpha \hat{c}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0 \\ \beta_1,\beta_2=0}} \nu_{\alpha_2\alpha_1,\beta_1\beta_2} \hat{c}^+_{\alpha_2} \hat{c}^+_{\alpha_1} \hat{c}_{\beta_1} \hat{c}_{\beta_2}.$$

Графический образ взаимодействия в фоковском пространстве



Пусть $O_N = n_1, n_2, \ldots, n_N$ – произвольная выборка номеров одночастичных состояний $|\phi_n\rangle$ (для бозонов некоторые или все n_i могут совпадать, а для фермионов $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$). Тогда произвольное состояние тождественных частиц в фоковском пространстве можно записать в виде (здесь операторы рождения и уничтожения фермионов обозначаются также, как и бозонные)

$$|\Phi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{O_N} C_{n_1,n_2,\ldots,n_N} \hat{a}^+_{n_1} \hat{a}^+_{n_2} \ldots \hat{a}^+_{n_N} |0\rangle.$$

Если одночастичный гамильтониан $\hat{h}$ коммутирует с выбранным полным набором наблюдаемых, то $h_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ (ε_α – энергетический одночастичный спектр) и

$$\hat{H}_0 = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \hat{a}^+_\alpha \hat{a}_\alpha,$$

а так как оператор $\hat{a}^+_\alpha \hat{a}_\alpha$ считает число частиц в состоянии $|\phi_\alpha\rangle$, то выбранный способ описания физически вполне адекватен.

II. Когерентные состояния

So: определено пространство состояний системы любого числа тождественных частиц (бозонов и фермионов). Операторы рождения и уничтожения, действующие в этом пространстве, подчиняются каноническим коммутационным (антикоммутационным) соотношениям. Построим представления этих соотношений, а для этого сначала определим одночастичные когерентные состояния, которые будут использоваться для построения представления.

A. Бозоны

Одночастичные когерентные состояния можно определить как собственные состояния оператора уничтожения

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{3}$$

Для изучения свойств таких состояний построим базис одночастичного пространства из собственных состояний $|n\rangle$, $n = 0, 1, \ldots$, самосопряженного оператора $\hat{a}^+\hat{a}$

$$\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle.$$

Это уравнение уже решалось при изучении гармонического осциллятора. Операторы рождения и уничтожения для гармонического осциллятора строились совершенно другим способом, но для нахождения собственных состояний и значений использовались только два свойства таких операторов: их сопряженность друг к другу и коммутационные соотношения $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Поэтому ответ:

1. собственные значения оператора $\lambda_n = n,\ n = 0, 1, \ldots,$
2. существует нормированное вакуумное состояние $|0\rangle$, которое удовлетворяет уравнению $\hat{a}|0\rangle = 0$,
3. собственные состояния
$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle, \quad n = 0, 1, \ldots,$$
4. эти состояния ортонормированы $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$
5. и для них существует разложение единицы
$$\sum_{n=0} |n\rangle\,\langle n| = \hat{\mathrm{I}}.$$

Разложим когерентное состояние по базису $|\alpha\rangle = \sum\limits_{n=0} c_n|n\rangle$, тогда

$$\hat{a}\sum_{n=0} c_n|n\rangle = \sum_{n=1} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0} c_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle = \alpha\sum_{n=0} c_n|n\rangle.$$

Отсюда следует, что $c_n = c_0 \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$, а из условия нормировки находим c_0. Таким образом,

$$|\alpha\rangle = \exp\Big[-\frac{\bar{\alpha}\alpha}{2}\Big]\sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \exp\Big[-\frac{\bar{\alpha}\alpha}{2} + \alpha\hat{a}^+\Big]|0\rangle,$$

причем α – любое комплексное число. Такая система собственных состояний переполнена.

Скалярное произведение когерентных состояний

$$\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = \exp\Big[-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_1\alpha_1 - \frac{1}{2}\bar{\alpha}_2\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2\Big].$$

Для построения представления фоковского пространства крайне важно, что для когерентных состояний есть разложение единицы

$$\int_C \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha| = \hat{\mathrm{I}}, \quad \alpha = x + \mathrm{i}y,\ \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

интегрирование ведется по всей комплексной плоскости.

Действительно:

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha| = \sum_{m,n=0}\frac{|n\rangle\,\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}\alpha}\alpha^n\bar{\alpha}^m =$$

$$= \sum_{m,n=0}\frac{|n\rangle\,\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\int_0^\infty \mathrm{d}\varrho\,\varrho\varrho^{n+m}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(n-m)} = \pi\sum_{m,n=0}\frac{|n\rangle\,\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\int_0^\infty \mathrm{d}\varrho\,2\varrho\varrho^{n+m}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\delta_{nm} =$$

$$= \pi\sum_{n=0}\frac{|n\rangle\,\langle n|}{n!}\int_0^\infty \mathrm{d}u\,u^n\mathrm{e}^{-u} = \pi\sum_{n=0}|n\rangle\,\langle n| = \pi\hat{\mathrm{I}}.$$

B. Фермионы

Теперь попытаемся реализовать приведенную программу построения когерентных состояний для фермионов. Антикоммутационные соотношения для одночастичного состояния

$$[\hat{c}, \hat{c}^+]_+ = \hat{c}\,\hat{c}^+ + \hat{c}^+\,\hat{c} = 1, \quad (\hat{c}^+)^2 = \hat{c}^2 = 0.$$

Матричное представление минимальной размерности

$$\hat{c}^+ = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Задача на собственные значения λ_n и состояния $|n\rangle$ самосопряженного оператора $\hat{c}^+\hat{c}$:

1. собственные значения оператора $\lambda_n = n,\ n = 0, 1,$

2. существует нормированное вакуумное состояние $|0\rangle$, которое удовлетворяет уравнению $\hat{c}|0\rangle = 0,$

3. собственное состояние $|1\rangle = \hat{c}^{+}|0\rangle,$

4. эти состояния ортонормированы $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$

5. и для них существует разложение единицы

$$\sum_{n=0}^{1} |n\rangle\,\langle n| = \hat{\mathrm{I}}.$$

Определим когерентные состояния как решения уравнения

$$\hat{c}\,|\theta\rangle = \theta\,|\theta\rangle,$$

где (предвосхищая ближайшее будущее) θ – некоторый объект, имеющий комплексную структуру $\theta = x + \mathrm{i}y$. Разлагая когерентное состояние по базису $|\theta\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, получим

$$\hat{c}\,|\theta\rangle = c_1|0\rangle = \theta(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle), \quad c_1 = \theta\,c_0,\ \theta\,c_1 = 0.$$

Простейший анализ показывает, что нетривиальное решение возможно, если

$$\theta^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}(xy + yx) = 0, \quad x^2 = y^2 = 0,\ xy + yx = 0.$$

Конечно же $x = y = 0$, если это действительные числа, и, вместо семейства когерентных состояний, есть только одно – вакуумное. Однако, семейство когерентных состояний, которые параметризуются величиной θ, существует, если считать переменные x, y – грассмановыми. Такой путь, вообще говоря, математически не прост: умножение на грассманову переменную не определено в гильбертовом пространстве. Но, если очень надо, можно попробовать. Итак, x, y – действительные образующие алгебры Грассмана. Если ввести сопряженную переменную $\bar{\theta} = x - \mathrm{i}y$, то

$$\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0, \quad \theta\bar{\theta} + \bar{\theta}\theta = 0.$$

Запишем когерентные ket- и bra- состояния

$$|\theta\rangle = c_0(|0\rangle + \theta|1\rangle), \quad \langle\theta| = \bar{c}_0(\langle 0| + \bar{\theta}\langle 1|),$$

воспользуемся условием нормировки

$$1 = \langle\theta|\theta\rangle = \bar{c}_0 c_0 (1 + \bar{\theta}\theta) = \bar{c}_0 c_0 \mathrm{e}^{\bar{\theta}\theta}.$$

Отсюда, во-первых, следует правило сопряжения произведения комплексных грассмановых переменных

$$\overline{\bar{\theta}\theta} = \bar{\theta}\theta,$$

а также окончательное выражение для семейства когерентных однофермионных состояний

$$|\theta\rangle = \exp\Big[-\frac{\bar{\theta}\theta}{2}\Big] \sum_{n=0}^{1} \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \exp\Big[-\frac{\bar{\theta}\theta}{2} + \theta \hat{c}^+\Big] |0\rangle,$$

где θ – комплексная грассманова переменная (сравнить с бозонным случаем). Скалярное произведение когерентных состояний

$$\langle\theta_1|\theta_2\rangle = \exp\Big[-\frac{1}{2}\bar{\theta}_1\theta_1 - \frac{1}{2}\bar{\theta}_2\theta_2 + \bar{\theta}_1\theta_2\Big].$$

Разложение единицы. По аналогии с бозонным разложением единицы запишем формальное выражение

$$\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, |\theta\rangle \, \langle\theta|$$

с интегрированием по грассмановым переменным и определим процедуру интегрирования так, чтобы разложение единицы существовало и в этом случае.

Таким образом,

$$\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, |\theta\rangle \, \langle\theta| =$$

$$= |0\rangle \, \langle 0| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-\bar{\theta}\theta} + |0\rangle \, \langle 1| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-\bar{\theta}\theta} \bar{\theta} + |1\rangle \, \langle 0| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-\bar{\theta}\theta} \theta + |1\rangle \, \langle 1| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-\bar{\theta}\theta} \bar{\theta}\theta =$$

$$= |0\rangle \, \langle 0| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, (1 + 2\mathrm{i}yx) + |0\rangle \, \langle 1| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, (x - \mathrm{i}y) + |1\rangle \, \langle 0| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, (x + \mathrm{i}y) + |1\rangle \, \langle 1| \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, 2\mathrm{i}yx$$

Это выражение сводится к разложению единицы, если

$$\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, (1 + 2\mathrm{i}yx) = \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, 2\mathrm{i}yx \neq 0, \quad \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, (x + \mathrm{i}y) = \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, (x - \mathrm{i}y) = 0.$$

Будем считать, что символы $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ – тоже грассмановы переменные, то есть

$$\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}y^2 = 0, \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0, \; x\mathrm{d}x + \mathrm{d}x x = x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y x = y\mathrm{d}x + \mathrm{d}x y = y\mathrm{d}y + \mathrm{d}y y = 0.$$

Тогда поставленные условия будут выполнены, если кратные интегралы понимать как повторные и считать, что (Ф.А.Березин)

$$\int \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}y = 0, \quad \int \mathrm{d}x \, x = \int \mathrm{d}y \, y = 1.$$

В этом случае

$$\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\mathrm{i}} |\theta\rangle \langle\theta| = \hat{\mathrm{I}}.$$

Так как $\theta, \bar{\theta}$ – тоже грассмановы переменные, то

$$1 = \int \mathrm{d}\bar{\theta}\mathrm{d}\theta\, \theta\bar{\theta} = 2\mathrm{i} \int \mathrm{d}\bar{\theta}\mathrm{d}\theta\, yx = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, yx,$$

следовательно,

$$\mathrm{d}\bar{\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\mathrm{i}}.$$

Таким образом, разложение единицы по фермионным когерентным состояниям можно определить и оно имеет вид

$$\int \mathrm{d}\bar{\theta}\mathrm{d}\theta\, |\theta\rangle \langle\theta| = \hat{\mathrm{I}}.$$

So: путем введения грассмановых переменных и правил интегрирования по ним, удалось добиться полной формальной аналогии между одночастчными когерентными состояниями бозонов и фермионов.

Элементарный анализ на грассмановой алгебре.

Пусть $x_i, i = 0, 1, \ldots,$ – грассмановы переменные

$$x_i x_k + x_k x_i = 0.$$

Функции от грассмановых переменных

$$f(x) = f_0 + \sum_n f_1(n) x_n + \sum_{n_1 < n_2} f_2(n_1, n_2) x_{n_1} x_{n_2} + \cdots + \sum_{n_1 < \cdots < n_N} f_N(n_1, \ldots, n_N) x_{n_1} \ldots x_{n_N} + \ldots$$

Определим производные (левые и правые)

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_{n_k}} x_{n_1} \ldots x_{n_{k-1}} x_{n_k} x_{n_{k+1}} \ldots x_{n_N} = (-1)^{k-1} x_{n_1} \ldots x_{n_{k-1}} x_{n_{k+1}} \ldots x_{n_N},$$

$$x_{n_1} \ldots x_{n_{k-1}} x_{n_k} x_{n_{k+1}} \ldots x_{n_N} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{n_k}} = (-1)^{N-k} x_{n_1} \ldots x_{n_{k-1}} x_{n_{k+1}} \ldots x_{n_N}$$

Интеграл.

Грассмановы символы дифференциалов $\mathrm{d}x_i$

$$\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k + \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_i = x_i \mathrm{d}x_k + \mathrm{d}x_k x_i = 0.$$

Однократные интегралы

$$\int \mathrm{d}x_i = 0, \quad \int \mathrm{d}x_i\, x_i = 1, \text{ суммирования по } i \text{ нет.}$$

Кратные интегралы понимаются как повторные.

Линейная замена переменных. Определим $y_i = a_{ik}x_k$. Переменные y_i – грассмановы. Найдем, что при такой замене происходит с дифференциалами $\mathrm{d}y_i$. Пусть $\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}x_k\, b_{ki}$, тогда

$$\delta_{ki} = \int \mathrm{d}y_i\, y_k = \int \mathrm{d}x_m\, x_n\, b_{mi}a_{kn} = a_{km}b_{mi}, \quad b_{ik} = (a)^{-1}_{ik}.$$

Следовательно, при линейной замене

$$y_i = a_{ik}x_k, \quad \mathrm{d}y_i = \mathrm{d}x_k\,(a)^{-1}_{ki}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \dots \mathrm{d}y_N = \frac{1}{\det(a_{ik})}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_N.$$

III. Представления коммутационных и антикоммутационных соотношений

Повторимся. Пусть $O_N = n_1, n_2, \dots, n_N$ – произвольная выборка номеров одночастичных состояний $|\phi_n\rangle$ (для бозонов некоторые или все n_i могут совпадать, а для фермионов $n_1 < n_2 < \dots < n_N$). Тогда произвольное состояние тождественных частиц в фоковском пространстве можно записать в виде (здесь операторы рождения и уничтожения фермионов обозначаются также, как и бозонные)

$$|\Phi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{O_N} C_{n_1,n_2,\dots,n_N}\hat{a}^+_{n_1}\hat{a}^+_{n_2}\dots\hat{a}^+_{n_N}|0\rangle.$$

Рассмотрим когерентное состояние

$$|\alpha\rangle \equiv |\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_i\rangle \otimes \dots,$$

Далее, если это не оговорено специально, α – комплексная переменная для бозонов и грассманова для фермионов.

Представление ket-состояния определим вот так

$$|\Phi\rangle \Longrightarrow \Phi(\bar{\alpha}) = \exp\Big[\frac{1}{2}\bar{\alpha}\alpha\Big]\langle\alpha|\Phi\rangle, \quad \bar{\alpha}\alpha = \sum_{i=0}\bar{\alpha}_i\alpha_i.$$

Из этого определения находим

$$\Phi(\bar{\alpha}) = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{O_N} C_{n_1,n_2,\dots,n_N}\bar{\alpha}_{n_1}\bar{\alpha}_{n_2}\dots\bar{\alpha}_{n_N},$$

и произвольное состояние представляется антиголоморфной функцией многих переменных (голоморфное представление).

Bra-состояние, как обычно, получается сопряжением этой функции. Однако, обозначать такую функцию будем несколько иначе, имея в виду следующее

$$\overline{\Phi(\bar{\alpha})} \equiv \bar{\Phi}(\alpha) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{O_N} \bar{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_N} \alpha_{n_1} \alpha_{n_2} \ldots \alpha_{n_N}.$$

Скалярное произведение в таком представлении

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha \, \langle \Phi_1 | \alpha \rangle \langle \alpha | \Phi_2 \rangle = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha \, \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}\alpha} \bar{\Phi}_1(\alpha) \Phi_2(\bar{\alpha}), \quad \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha = \prod_{i=0} \mathrm{d}\bar{\alpha}_i \mathrm{d}\alpha_i.$$

Найдем как представляется состояние, получающееся в результате действия нормально упорядоченного оператора $N(\ldots, \hat{a}_i^+, \ldots | \ldots, \hat{a}_k, \ldots)$ (оператора, в котором все операторы рождения стоят слева, а все операторы уничтожения - справа) на состояние $|\Phi\rangle$

$$\hat{N}(\ldots, \hat{a}_i^+, \ldots | \ldots, \hat{a}_k, \ldots) |\Phi\rangle \Longrightarrow \mathrm{e}^{\bar{\alpha}\alpha/2} \int \mathrm{d}\bar{\alpha}^0 \mathrm{d}\alpha^0 \, \langle \alpha | \hat{N} | \alpha^0 \rangle \, \langle \alpha^0 | \Phi \rangle =$$

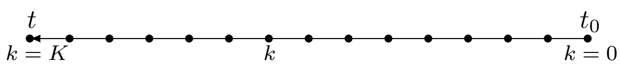
$$= \int \mathrm{d}\bar{\alpha}^0 \mathrm{d}\alpha^0 \, \mathrm{e}^{\bar{\alpha}\alpha/2 - \bar{\alpha}^0\alpha^0/2} N(\bar{\alpha}|\alpha^0) \langle \alpha | \alpha^0 \rangle \, \Phi(\bar{\alpha}^0) = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}^0 \mathrm{d}\alpha^0 \, \mathrm{e}^{(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^0)\alpha^0} N(\bar{\alpha}|\alpha^0) \, \Phi(\bar{\alpha}^0)$$

IV. Континуальный интеграл

Эволюция начального состояния $|\Phi_0\rangle$ в квантовой теории управляется гамильтонианом физической системы $\hat{H} = H(\hat{a}^+, \hat{a})$ и описывается уравнением Шредингера

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\Phi(t)\rangle = \hat{H} |\Phi(t)\rangle, \quad |\Phi(t_0)\rangle = |\Phi_0\rangle.$$

Разобьем эволюцию на K, равных $\epsilon = (t - t_0)/K$, промежутка времени (решеточная аппроксимация эволюции). Устремим $K \to \infty$, $\epsilon \to 0$.



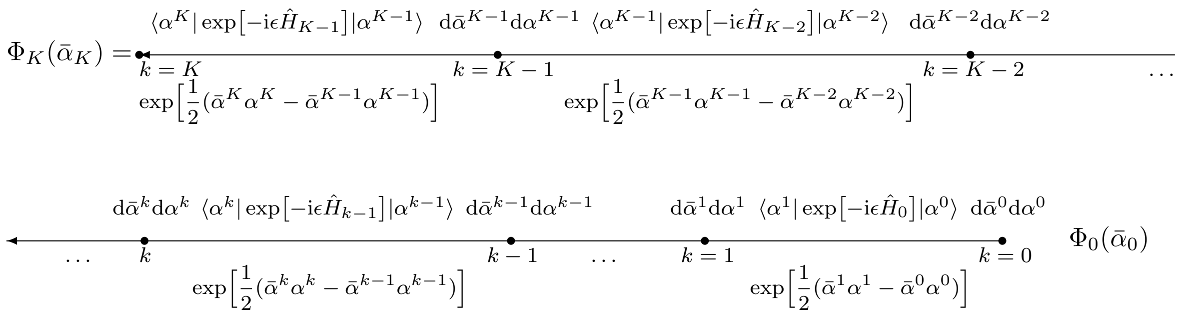
Тогда состояние в начальный момент времени $|\Phi(t_0)\rangle = |\Phi_{k=0}\rangle$ связано с конечным $|\Phi(t)\rangle = |\Phi_{k=K}\rangle$ соотношением

$$|\Phi_{k=K}\rangle = \exp\bigl[-\mathrm{i}\epsilon \hat{H}_{K-1}\bigr] \exp\bigl[-\mathrm{i}\epsilon \hat{H}_{K-2}\bigr] \ldots \exp\bigl[-\mathrm{i}\epsilon \hat{H}_k\bigr] \ldots \exp\bigl[-\mathrm{i}\epsilon \hat{H}_0\bigr] |\Phi_{k=0}\rangle.$$

Вставим разложения единицы

$$\hat{\mathrm{I}} = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}^k \mathrm{d}\alpha^k \, |\alpha\rangle \, \langle \alpha|, \quad k = 0, \ldots, K-1,$$

по приведенной ниже схеме и перейдем в голоморфное представление:



Результат эволюции по начальному состоянию можно представить в виде

$$\Phi_t(\bar\alpha^K) = \int d\bar\alpha^0 d\alpha^0 e^{-\bar\alpha^0\alpha^0} U_{t,t_0}(\bar\alpha^K,\alpha^0)\Phi_0(\bar\alpha_0).$$

Здесь определена ключевая для динамики физической системы величина – ядро оператора эволюции $U_{t,t_0}(\bar\alpha^K,\alpha^0)$, антиголоморфное по первому и голоморфное по второму аргументу:

$$U_{t,t_0}(\bar\alpha^K,\alpha^0) = e^{\bar\alpha^0\alpha^0}\Big(\prod_{k=1}^{K-1}\int d\bar\alpha^k d\alpha^k\Big)\prod_{k=1}^{K}\exp\Big[\frac{1}{2}(\bar\alpha^k\alpha^k - \bar\alpha^{k-1}\alpha^{k-1})\Big]\langle\alpha^k|\exp[-i\epsilon\hat H_{k-1}]|\alpha^{k-1}\rangle.$$

Для вычисления матричного элемента по когерентным состояниям проделаем следующую процедуру (гамильтониан $\hat H = H(\dots,\hat a_i^+,\dots|\dots,\hat a_k,\dots)$ предполагается нормально упорядоченным):

$$\langle\alpha^k|\exp[-i\epsilon\hat H_{k-1}]|\alpha^{k-1}\rangle = \langle\alpha^k|[1 - i\epsilon\hat H_{k-1}]|\alpha^{k-1}\rangle + O(\epsilon^2) =$$

$$= \langle\alpha^k|\alpha^{k-1}\rangle[1 - i\epsilon H_{k-1}(\bar\alpha^k,\alpha^{k-1})] + O(\epsilon^2) = \langle\alpha^k|\alpha^{k-1}\rangle\,\exp[-i\epsilon H_{k-1}(\bar\alpha^k|\alpha^{k-1})] + O(\epsilon^2).$$

Теперь ядро оператора эволюции представимо в виде (есть над чем подумать)

$$U_{t,t_0}(\bar\alpha^K,\alpha^0) = e^{\bar\alpha^0\alpha^0}\ \Big(\prod_{k=1}^{K-1}\int d\bar\alpha^k d\alpha^k\Big)\prod_{k=1}^{K}\exp\big[(\bar\alpha^k - \bar\alpha^{k-1})\alpha^{k-1} - i\epsilon H_{k-1}(\bar\alpha^k|\alpha^{k-1})\big]\Big|_{K\to\infty}. \tag{4}$$

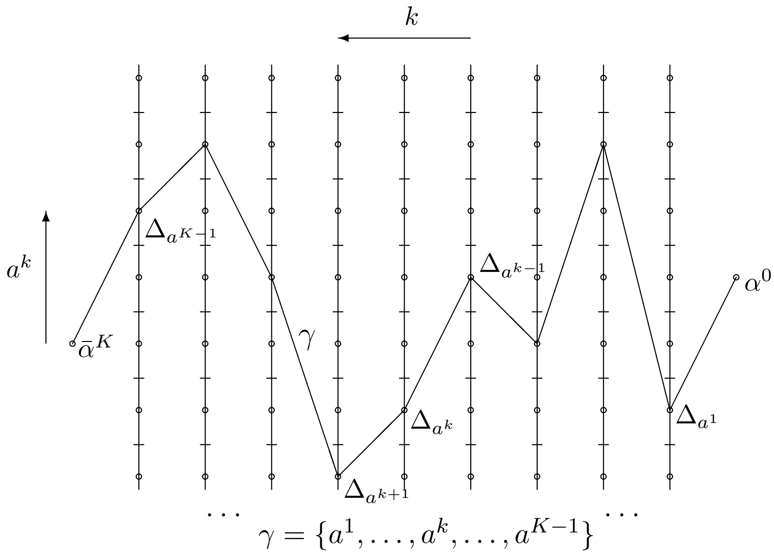
Представим интегралы по $d\bar\alpha^k d\alpha^k$, $k = 1,\dots,K-1$, в виде сумм Римана. Для этого разобьем комплексное пространство $\mathbb{C}_0^{(k)}\otimes\dots\otimes\mathbb{C}_n^{(k)}\otimes\dots$, $k = 1,\dots,K-1$, (индекс n нумерует одночастичные состояния, по которым построено фоковское пространство, а индекс k указывает на момент времени, когда берется интеграл) на элементарные ячейки Δ_{a^k} объема $vol(\Delta_{a^k})\to 0$. Эти ячейки пронумеруем индексом a^k. Определим

$$Y_{a^{k-1}}^{a^k} \equiv \exp\Big[(\bar\alpha^k - \bar\alpha^{k-1})\alpha^{k-1} - i\epsilon H_{k-1}(\bar\alpha^k|\alpha^{k-1})\Big]_{\alpha^k\in\Delta_{a^k},\alpha^{k-1}\in\Delta_{a^{k-1}}}.$$

Тогда

$$U_{t,t_0}(\bar\alpha^K,\alpha^0) =$$
$$= \mathrm{e}^{\bar\alpha^0\alpha^0}\sum_{a^{K-1}} vol(\Delta_{a^{K-1}})\cdots\sum_{a^k} vol(\Delta_{a^k})\cdots\sum_{a^1} vol(\Delta_{a^1}) Y^{a^K}_{a^{K-1}}\dots Y^{a^{k+1}}_{a^k} Y^{a^k}_{a^{k-1}}\dots Y^{a^1}_{a^0} =$$
$$= \mathrm{e}^{\bar\alpha^0\alpha^0}\sum_{\gamma=\{a^1,\dots,a^k,\dots,a^{K-1}\}} vol_\gamma \exp\Big[\sum_{k=1}^{K}\big[(\bar\alpha^k-\bar\alpha^{k-1})\alpha^{k-1} - \mathrm{i}\epsilon H_{k-1}(\bar\alpha^k|\alpha^{k-1})\big]\Big]_{\alpha^k\in\Delta_{a^k}, a^k\in\gamma},$$

здесь $vol_\gamma = \prod_{k=1}^{K-1} vol(\Delta_{a^k})_{a^k\in\gamma}$. В приведенных выражениях проведено пересуммирование (см. рисунок): вместо последовательного суммирования по $a^1,\dots,a^k,\dots,a^{K-1}$ взята произвольная выборка (путь) $\gamma=\{a^1,\dots,a^k,\dots,a^{K-1}\}$ (каждый индекс a^k при данном k встречается только один раз), вдоль этой выборки (пути) проведено суммирование, а затем проведено суммирование по всем возможным выборкам γ (путям).



Поэтому в пределе $vol_\gamma\to 0$, $K\to\infty$, ядро оператора эволюции можно представлять себе как интеграл по всем возможным траекториям $\gamma=\{\bar\alpha(\tau),\alpha(\tau)\}$ в пространстве $\mathbb{C}_0\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}_n\otimes\dots$, которые начинаются в α^0 при $\tau=t_0$ и заканчиваются в $\bar\alpha^K$ при $\tau=t$:

$$U_{t,t_0}(\bar\alpha^K,\alpha^0) = \int_{\gamma:\ \bar\alpha(t)=\bar\alpha^K,\alpha(t_0)=\alpha^0}\mathcal{D}\bar\alpha(\tau)\mathcal{D}\alpha(\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\gamma]},$$
$$\mathrm{i}S[\gamma] = \bar\alpha(t_0)\alpha^0 + \int_\gamma \mathrm{d}\tau\,\Big[\big(\partial_\tau\bar\alpha(\tau)\big)\alpha(\tau) - \mathrm{i}H_\tau\big(\bar\alpha(\tau)|\alpha(\tau)\big)\Big]. \qquad (5)$$

Приведенную конструкцию ни в коей мере нельзя рассматривать как корректное математическое определение. Это скорее эвристический способ рассуждений, который, правда, не раз уже доказал свою эффективность.

Вычислим континуальный интеграл, определяющий ядро оператора эволюции в голоморфном представлении свободной теории, то есть теории с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_m \varepsilon_m \hat{a}_m^+ \hat{a}_m.$$

0. Используя соотношение

$$U_{t,t_0}(\bar{\alpha}^K, \alpha^0) = \exp\Big[\frac{1}{2}(\bar{\alpha}^K \alpha^K + \bar{\alpha}_0 \alpha_0)\Big] \langle \alpha^K | \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)\hat{H}} | \alpha^0 \rangle,$$

прямые вычисления дают

$$U_{t,t_0}(\bar{\alpha}^K, \alpha^0) = \exp\Big[\sum_m \bar{\alpha}_m^K \alpha_m^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_m (t-t_0)}\Big].$$

1. Проведем вычисления, используя решеточную аппроксимацию (4). Обозначение: $\lambda_m = 1 - \mathrm{i}\epsilon\varepsilon_m$.

$$U_{t,t_0}(\bar{\alpha}^K, \alpha^0) = \prod_m \Big(\prod_{k=1}^{K-1} \mathrm{d}\bar{\alpha}_m^k \mathrm{d}\alpha_m^k \Big) \exp\Big[\sum_{k=0}^{K-1} (\lambda_m \bar{\alpha}_m^{k+1} \alpha_m^k - \bar{\alpha}_m^k \alpha_m^k) + \bar{\alpha}_m^0 \alpha_m^0 \Big] =$$

$$\prod_m \Big(\prod_{k=2}^{K-1} \mathrm{d}\bar{\alpha}_m^k \mathrm{d}\alpha_m^k \Big) \exp\Big[\sum_{k=2}^{K-1} (\lambda_m \bar{\alpha}_m^{k+1} \alpha_m^k - \bar{\alpha}_m^k \alpha_m^k) \Big] \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_m^1 \mathrm{d}\alpha_m^1 \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_m^1 \alpha_m^1 + \lambda_m \bar{\alpha}_m^2 \alpha_m^1 + \lambda_m \bar{\alpha}_m^1 \alpha_m^0} =$$

$$\prod_m \Big(\prod_{k=3}^{K-1} \mathrm{d}\bar{\alpha}_m^k \mathrm{d}\alpha_m^k \Big) \exp\Big[\sum_{k=3}^{K-1} (\lambda_m \bar{\alpha}_m^{k+1} \alpha_m^k - \bar{\alpha}_m^k \alpha_m^k) \Big] \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_m^2 \mathrm{d}\alpha_m^2 \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_m^2 \alpha_m^2 + \lambda_m \bar{\alpha}_m^3 \alpha_m^2 + \lambda_m^2 \bar{\alpha}_m^2 \alpha_m^0} =$$

$$\dots = \prod_m \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_m^{K-1} \mathrm{d}\alpha_m^{K-1} \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_m^{K-1} \alpha_m^{K-1} + \lambda_m \bar{\alpha}_m^K \alpha_m^{K-1} + \lambda_m^{K-1} \bar{\alpha}_m^{K-1} \alpha_m^0} = \prod_m \mathrm{e}^{\bar{\alpha}_m^K \alpha_m^0 \lambda_m^K} \Big|_{K\to\infty}$$

Ответ:

$$U_{t,t_0}(\bar{\alpha}^K, \alpha^0) = \exp\Big[\sum_m \bar{\alpha}_m^K \alpha_m^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_m (t-t_0)}\Big].$$

2. Вычислим это же ядро эволюции, используя континуальную версию.

$$U_{t,t_0}(\bar{\alpha}^K, \alpha^0) = \prod_m \int_{\substack{\bar{\alpha}_m(t)=\bar{\alpha}_m^K \\ \alpha_m(t_0)=\alpha_m^0}} \mathcal{D}\bar{\alpha}_m(\tau) \mathcal{D}\alpha_m(\tau)$$
$$\exp\Big[\bar{\alpha}_m(t_0)\alpha_m^0 + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\tau \, \big[\big(\partial_\tau \bar{\alpha}_m(\tau)\big) \alpha_m(\tau) - \mathrm{i}\epsilon_m \bar{\alpha}_m(\tau) \alpha_m(\tau) \big] \Big].$$

Найдем экстремальную (классическую) траекторию показателя экспоненты (с точностью до мнимой единицы действия)

$$\mathrm{i}\,\delta S_m = \delta\bar\alpha_m(t_0)\,\alpha_m^0 +$$
$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\,\Big[\big(\partial_\tau\delta\bar\alpha_m(\tau)\big)\alpha_m(\tau) + \big(\partial_\tau\bar\alpha_m(\tau)\big)\delta\alpha_m(\tau) - \mathrm{i}\epsilon_m\delta\bar\alpha_m(\tau)\,\alpha_m(\tau) - \mathrm{i}\epsilon_m\bar\alpha_m(\tau)\,\delta\alpha_m(\tau)\Big] =$$
$$= \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau\,\big(\partial_\tau\bar\alpha_m(\tau) - \mathrm{i}\epsilon_m\bar\alpha_m(\tau)\big)\delta\alpha_m(\tau) - \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau\,\delta\bar\alpha(\tau)\big(\partial_\tau\alpha_m(\tau) + \mathrm{i}\epsilon_m\alpha_m(\tau)\big) = 0.$$

Уравнения движения

$$(\partial_\tau - \mathrm{i}\varepsilon_m)\bar\alpha_m(\tau) = 0, \quad \bar\alpha_m(t) = \bar\alpha_m^K,$$
$$(\partial_\tau + \mathrm{i}\varepsilon_m)\alpha_m(\tau) = 0, \quad \alpha_m(t_0) = \alpha_m^0,$$

их решения

$$\bar\alpha_m^{\mathrm{cl}}(\tau) = \bar\alpha_m^K \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_m(t-\tau)}, \quad \alpha_m^{\mathrm{cl}}(\tau) = \alpha_m^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_m(\tau-t_0)}.$$

Сделаем в континуальном интеграле замену траекторий

$$\{\bar\alpha_m(\tau), \alpha_m(\tau):\ \bar\alpha_m(t) = \bar\alpha_m^K, \alpha_m(t_0) = \alpha_m^0\} \to \{\bar q_m(\tau), q_m(\tau):\ \bar q_m(t) = q_m(t_0) = 0\}$$

по формуле

$$\bar\alpha_m(\tau) = \bar\alpha_m^{\mathrm{cl}}(\tau) + \bar q_m(\tau), \quad \alpha_m(\tau) = \alpha_m^{\mathrm{cl}}(\tau) + q_m(\tau).$$

При такой замене

$$\mathcal{D}\bar\alpha_m(\tau)\mathcal{D}\alpha_m(\tau) = \mathcal{D}\bar q_m(\tau)\mathcal{D}q_m(\tau),$$
$$\mathrm{i}\,S_m = \bar\alpha_m^{\mathrm{cl}}(t_0)\alpha_m^0 + \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau\,\Big[\big(\partial_\tau\bar q_m(\tau)\big)q_m(\tau) - \mathrm{i}\epsilon_m\bar q_m(\tau)q_m(\tau)\Big].$$

Таким образом,

$$U_{t,t_0}(\bar\alpha^K, \alpha^0) = \mathcal{N}\exp\Big[\sum_m \bar\alpha_m^K\alpha_m^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_m(t-t_0)}\Big],$$

где величину

$$\mathcal{N} = \prod_m \int_{\substack{\bar q_m(t)=0\\ q_m(t_0)=0}} \mathcal{D}\bar q_m(\tau)\mathcal{D}q_m(\tau)\exp\Big[\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau\,\Big[\big(\partial_\tau\bar q_m(\tau)\big)q_m(\tau) - \mathrm{i}\epsilon_m\bar q_m(\tau)q_m(\tau)\Big]\Big]$$

можно рассматривать как некий нормировочный множитель, который по построению не зависит от $\bar\alpha^K, \alpha^0$ и равен (см. выше) единице $\mathcal{N} = 1$.

V. Скалярное поле

A. Частица без внутренних степеней свободы

Свободная частица в квантовой теории - частица, у которой сохраняется импульс:

$$[\hat{p}\,,\hat{h}\,] = 0,$$

$\hat{h}$ - гамильтониан частицы.

Рассмотрим систему на ограниченной области пространства ($-L \leqslant x \leqslant L$). Задача на собственные значения и собственные состояния импульса:

$$\hat{p}\,|\phi_p\rangle = p\,|\phi_p\rangle. \tag{6}$$

В координатном представлении $|\phi_p\rangle \Rightarrow \phi_p(x) \in L^2(x \in [-L, L], \mathrm{d}x); \hat{p}\,|\phi_p\rangle \Rightarrow -\mathrm{i}\partial_x\phi_p(x)$, $\phi_p(x)$ - абсолютно непрерывная функция из $L^2(x \in [-L, L], \mathrm{d}x)$, такая что $\partial_x\phi_p(x) \in L^2(x \in [-L, L], \mathrm{d}x)$ и, кроме того, $\phi_p(-L) = \phi_p(L)$ (выбрано одно из возможных самосопряженных расширений).

Собственные состояния и собственные значения

$$\phi_p(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}}{\sqrt{V}}, \quad pL = \pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ V = 2L. \tag{7}$$

Так как гамильтониан $\hat{h}$ коммутирует с $\hat{p}$, у этих операторов существует общий полный набор собственных состояний, поэтому

$$\langle p_1|\hat{h}|p_2\rangle = \varepsilon_{p_1}\,\delta_{p_1,p_2}.$$

Здесь ε_p - энергия частицы с импульсом p. В релятивистской теории

$$\varepsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2},$$

где m - масса рассматриваемой частицы.

Если у рассматриваемых частиц нет никаких внутренних степеней свободы, то квантовая теория таких невзаимодействующих частиц в фоковском пространстве описывается гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \sum_p \varepsilon_p \hat{a}_p^+ \hat{a}_p, \tag{8}$$

причем в качестве одночастичного оператора, необходимого для построения фоковского пространства, выбран оператор импульса частицы на отрезке $-L \leqslant x \leqslant L$.

B. Квантование классического скалярного поля.

Свободное массивное скалярное поле определяется лагранжианом

$$L = \int_V \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\big[\partial_\mu \phi(t,x)\partial^\mu \phi(t,x) - m^2\phi^2(t,x)\big]. \tag{9}$$

Рассмотрим поле в большой, но конечной области пространства $x \in [-L, L]$. В этой области разложим поле в ряд по полной ортонормированной системе собственных состояний оператора импульса $\phi_p(x)$ (см. 7). На это можно смотреть, как на точечную замену переменных.

$$\phi(t,x) = \sum_k \phi_k(x) c_k(t).$$

Вещественность поля накладывает связь $c_{-k} = \bar{c}_k$.

В новых переменных

$$L = \sum_k \frac{1}{2}\big[\dot{c}_k(t)\dot{c}_{-k}(t) - \omega_k^2 c_k(t) c_{-k}(t)\big], \quad \omega_k^2 = k^2 + m^2.$$

Множество всех k, $k \neq 0$, можно разбить на пары $k, -k$. Множество таких k, что $k > 0$, обозначим K_+, а множество всех оставшихся $k \neq 0$ – K_-. Тогда

$$L = \frac{1}{2}\big[\dot{c}_0^2(t) - \omega_0^2 c_0^2(t)\big] + \sum_{k\in K_+}\big[\dot{c}_k(t)\dot{\bar{c}}_k(t) - \omega_k^2 c_k(t)\bar{c}_k(t)\big],$$

причем теперь c_k с $k \in K_+$ – независимые переменные, а c_0 – действительная.

Определим действительные q_k, Q_k

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k + \mathrm{i}Q_k), \quad k \in K_+$$

и переопределим $c_0 \equiv q_0$. Тогда лагранжиан примет вид

$$L = \frac{1}{2}\big[\dot{q}_0^2(t) - \omega_0^2 q_0^2(t)\big] + \frac{1}{2}\sum_{k\in K_+}\big[\dot{q}_k^2 + \dot{Q}_k^2 - \omega_k^2(q_k^2 + Q_k^2)\big].$$

Отсюда следует, что скалярное поле - набор гармонических осцилляторов.

Гамильтонизация очевидна:

$$H = \frac{1}{2}\big[p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2\big] + \frac{1}{2}\sum_{k\in K_+}\big[p_k^2 + P_k^2 + \omega_k^2(q_k^2 + Q_k^2)\big].$$

Квантование.

Гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\big[\hat{p}_0^2 + \omega_0^2\hat{q}_0^2\big] + \frac{1}{2}\sum_{k\in K_+}\big[\hat{p}_k^2 + \hat{P}_k^2 + \omega_k^2(\hat{q}_k^2 + \hat{Q}_k^2)\big].$$

Канонические коммутационные соотношения ($\hat{\mathcal{Q}}_\alpha = (\hat{q}_0, \hat{q}_i, \hat{Q}_i)$, $\hat{\mathcal{P}}_\alpha = (\hat{p}_0, \hat{p}_i, \hat{P}_i)$, $i \in K_+$)

$$[\hat{\mathcal{Q}}_\alpha, \hat{\mathcal{P}}_\beta] = \mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\hat{\mathrm{I}}, \quad [\hat{\mathcal{Q}}_\alpha, \hat{\mathcal{Q}}_\beta] = [\hat{\mathcal{P}}_\alpha, \hat{\mathcal{P}}_\beta] = 0.$$

Определим операторы рождения и уничтожения

$$\hat{\mathcal{A}}_\alpha = (\hat{\alpha}_0, \hat{a}_i, \hat{A}_i),\ \hat{\mathcal{A}}_\alpha^+ = (\hat{\alpha}_0^+, \hat{a}_i^+, \hat{A}_i^+),\ i \in K_+$$

следующим образом

$$\hat{\mathcal{A}}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\alpha}}\big(\mathrm{i}\hat{\mathcal{P}}_\alpha + \omega_\alpha\hat{\mathcal{Q}}_\alpha\big), \quad \hat{\mathcal{A}}_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\alpha}}\big(-\mathrm{i}\hat{\mathcal{P}}_\alpha + \omega_\alpha\hat{\mathcal{Q}}_\alpha\big).$$

Тогда

$$[\hat{\mathcal{A}}_\alpha, \hat{\mathcal{A}}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}\hat{\mathrm{I}}, \quad [\hat{\mathcal{A}}_\alpha, \hat{\mathcal{A}}_\beta] = [\hat{\mathcal{A}}_\alpha^+, \hat{\mathcal{A}}_\beta^+] = 0,$$

$$\hat{H} = \omega_0\Big[\hat{\alpha}_0^+\hat{\alpha}_0 + \frac{1}{2}\Big] + \sum_{k\in K_+}\omega_k\big[\hat{a}_k^+\hat{a}_k + \hat{A}_k^+\hat{A}_k + 1\big].$$

Введем операторы рождения и уничтожения, определенные при любых k:

$$k \in K_+: \qquad \hat{\alpha}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \mathrm{i}\hat{A}_k), \quad \hat{\alpha}_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k^+ - \mathrm{i}\hat{A}_k^+)$$

$$k \in K_-: \qquad \hat{\alpha}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{-k} - \mathrm{i}\hat{A}_{-k}), \quad \hat{\alpha}_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{-k}^+ + \mathrm{i}\hat{A}_{-k}^+).$$

Новые переменные подчиняются стандартным коммутационным соотношениям

$$[\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_k^+] = \delta_{ik}\hat{\mathrm{I}},\ [\hat{\alpha}_i^+, \hat{\alpha}_k^+] = [\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_k] = 0, \quad i, k \in K_+ \cup K_- \cup K_0,$$

и гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k\hat{\alpha}_k^+\hat{\alpha}_k + \frac{1}{2}\sum_k \omega_k. \tag{10}$$

Таким образом, квантовая теория релятивистских частиц с нулевым спином (см. (8)) эквивалентна квантовой теории скалярного поля. Есть единственное отличие: гамильтонианы этих теорий отличаются на постоянную величину (начало отсчета), см. (10), правда, равную бесконечности. В рассмотренной ситуации это и не так уж и страшно – к лагранжиану (9) скалярного поля, не нарушая Пуанкаре-инвариантности, можно прибавить константу. А то, что она дает бесконечный вклад в энергию, то в квантовой теории поля к этому нужно привыкать.

Выполнив вычисления, приведенные ниже, для оператора поля получим следующее выражение

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\hat{\alpha}_k + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\hat{\alpha}_k^+). \tag{11}$$

Простые вычисления для гамильтониана

$$\sum_k \omega_k \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k = \sum_{k\in K_+} \omega_k \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k + \sum_{k\in K_-} \omega_k \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in K_+} \omega_k (\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \hat{A}_k^+ \hat{A}_k - \mathrm{i}(\hat{A}_k^+ \hat{a}_k - \hat{a}_k^+ \hat{A}_k)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\in K_-} \omega_k (\hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k} + \hat{A}_{-k}^+ \hat{A}_{-k} + \mathrm{i}(\hat{A}_{-k}^+ \hat{a}_{-k} - \hat{a}_{-k}^+ \hat{A}_{-k})) =$$

$$= \sum_{k\in K_+} \omega_k (\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \hat{A}_k^+ \hat{A}_k).$$

Выражение для поля

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k\in K_+} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k\in K_-} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \frac{1}{\sqrt{V}} c_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k\in K_+} (c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \bar{c}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}) + \frac{1}{\sqrt{V}} c_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2V}}\sum_{k\in K_+} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}(q_k + \mathrm{i}Q_k) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(q_k - \mathrm{i}Q_k)\right] + \frac{1}{\sqrt{V}} q_0 =$$

$$= \sum_{k\in K_+} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{a_k^+ + a_k + \mathrm{i}(A_k^+ + A_k)}{2\sqrt{V\omega_k}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{a_k^+ + a_k - \mathrm{i}(A_k^+ + A_k)}{2\sqrt{V\omega_k}}\right] + \frac{\alpha_0^+ + \alpha_0}{\sqrt{2\omega_0 V}} =$$

$$= \sum_{k\in K_-} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{a_{-k}^+ + \mathrm{i}A_{-k}^+}{2\sqrt{V\omega_k}} + \sum_{k\in K_+} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{i}(a_k + \mathrm{i}A_k)}{2\sqrt{V\omega_k}} + \sum_{k\in K_+} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{a_k^+ - \mathrm{i}A_k^+}{2\sqrt{V\omega_k}} +$$

$$+ \sum_{k\in K_-} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{i}(a_{-k} - \mathrm{i}A_{-k})}{2V\omega_k} + \frac{\alpha_0^+ + \alpha_0}{\sqrt{2V\omega_0}} =$$

$$= \sum_{k\in K_-} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\alpha_k^+}{\sqrt{2\omega_k V}} + \sum_{k\in K_+} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\alpha_k}{\sqrt{2\omega_k V}} + \sum_{k\in K_+} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\alpha_k^+}{\sqrt{2\omega_k V}} + \sum_{k\in K_-} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\alpha_k}{\sqrt{2\omega_k V}} + \frac{\alpha_0^+ + \alpha_0}{\sqrt{2V\omega_0}} =$$

$$= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\alpha_k + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\alpha_k^+).$$

Важно, что действие, записанное в форме (9), инвариантно относительно преобразований Пуанкаре. Отсюда следует возможность построения взаимодействия рассматриваемых частиц, которое заведомо инвариантно относительно действия таких преобразований. Простейший вариант двухчастичного взаимодействия

$$S_{int} = -\frac{\lambda}{4}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}x\, \phi^4(t,x).$$

Важные вещи, на которые следует обратить внимание.

- Взаимодействие приобретает новый, по сравнению с нерелятивистским

  $$\hat{a}^+_{p_1}\hat{a}^+_{p_2}\hat{a}_{p_3}\hat{a}_{p_4}$$

  характер, например,

  $$\hat{a}^+_{p_1}\hat{a}^+_{p_2}\hat{a}^+_{p_3}\hat{a}^+_{p_4} + \hat{a}_{p_1}\hat{a}_{p_2}\hat{a}_{p_3}\hat{a}_{p_4}.$$

- Инвариантность действия относительно группы преобразований Пуанкаре. Представления этой группы. Спин частицы.

C. Комплексное скалярное поле

Рассмотрим два свободных вещественных скалярных поля с одинаковой массой

$$L = \int \mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\big[\partial_\mu\phi_1(t,x)\partial^\mu\phi_1(t,x) - m^2\phi_1^2(t,x)\big] + \int \mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\big[\partial_\mu\phi_2(t,x)\partial^\mu\phi_2(t,x) - m^2\phi_2^2(t,x)\big].$$

Квантование

$$\hat{H} = \sum_p [\varepsilon_p\hat{\alpha}^+_p\hat{\alpha}_p + \varepsilon_p\hat{\beta}^+_p\hat{\beta}_p], \quad \varepsilon_p = \sqrt{p^2+m^2};$$

$$[\hat{\alpha}_{p_1},\hat{\alpha}^+_{p_2}] = \delta_{p_1,p_2},\ [\hat{\alpha}^+_{p_1},\hat{\alpha}^+_{p_2}] = [\hat{\alpha}_{p_1},\hat{\alpha}_{p_2}] = 0,$$

$$[\hat{\beta}_{p_1},\hat{\beta}^+_{p_2}] = \delta_{p_1,p_2},\ [\hat{\beta}^+_{p_1},\hat{\beta}^+_{p_2}] = [\hat{\beta}_{p_1},\hat{\beta}_{p_2}] = 0,$$

$$[\hat{\alpha}^+_{p_1},\hat{\beta}^+_{p_2}] = [\hat{\alpha}^+_{p_1},\hat{\beta}_{p_2}] = [\hat{\alpha}_{p_1},\hat{\beta}^+_{p_2}] = [\hat{\alpha}_{p_1},\hat{\beta}_{p_2}] = 0;$$

$$\hat{\phi}_1(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\hat{\alpha}_p + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{\alpha}^+_p), \quad \hat{\phi}_2(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\hat{\beta}_p + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{\beta}^+_p)$$

Определим комплексное скалярное поле

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2).$$

Лагранжиан свободного комплексного скалярного поля

$$L = \int \mathrm{d}^d x \, [\partial_\mu \bar{\phi}(x,t) \partial^\mu \phi(x,t) - m^2 \bar{\phi}(x,t) \phi(x,t)]. \qquad (12)$$

Определим новые операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\alpha}_p^+ - \mathrm{i}\hat{\beta}_p^+], \; \hat{a}_p = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\alpha}_p + \mathrm{i}\hat{\beta}_p], \quad \hat{b}_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\alpha}_p^+ + \mathrm{i}\hat{\beta}_p^+], \; \hat{b}_p = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\alpha}_p - \mathrm{i}\hat{\beta}_p].$$

Коммутационные соотношения те же

$$[\hat{a}_{p_1}, \hat{a}_{p_2}^+] = \delta_{p_1,p_2}, \; [\hat{a}_{p_1}^+, \hat{a}_{p_2}^+] = [\hat{a}_{p_1}, \hat{a}_{p_2}] = 0,$$
$$[\hat{b}_{p_1}, \hat{b}_{p_2}^+] = \delta_{p_1,p_2}, \; [\hat{b}_{p_1}^+, \hat{b}_{p_2}^+] = [\hat{b}_{p_1}, \hat{b}_{p_2}] = 0,$$
$$[\hat{a}_{p_1}^+, \hat{b}_{p_2}^+] = [\hat{a}_{p_1}^+, \hat{b}_{p_2}] = [\hat{a}_{p_1}, \hat{b}_{p_2}^+] = [\hat{a}_{p_1}, \hat{b}_{p_2}] = 0,$$

как и гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_p \varepsilon_p [\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p^+ \hat{b}_p].$$

Оператор поля (неэрмитов) принимает вид

$$\hat{\phi}(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \hat{a}_p + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{b}_p^+), \quad \hat{\phi}^+(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \hat{b}_p + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{a}_p^+).$$

Представление Шредингера динамики в квантовой теории.

Наблюдаемые $\hat{O} = O(\hat{p}, \hat{q})$ определяются в процессе измерения и не зависят от времени. Вся динамика связана с эволюцией состояния, которая описывается уравнением Шредингера

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi(t)\rangle = \hat{H}|\phi(t)\rangle, \quad |\phi(t=0)\rangle = |\phi_0\rangle,$$

или

$$|\phi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|\phi_0\rangle.$$

Средние значения наблюдаемых

$$\langle\phi(t)|\hat{O}|\phi(t)\rangle = \langle\phi_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hat{H}}\hat{O}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|\phi_0\rangle.$$

Отсюда следует возможность представления Гайзенберга динамики в квантовой теории:

задано не зависящее от времени состояние физической системы $|\phi_0\rangle$. Наблюдаемые физической системы эволюционируют согласно соотношению

$$\hat{O}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hat{H}}\hat{O}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{O}(t) = \mathrm{i}[\hat{H}, \hat{O}(t)], \quad \hat{O}(t=0) = \hat{O}.$$

Оператор поля в представлении Гайзенберга

$$\hat{\phi}(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hat{H}}\sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\hat{a}_p + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{b}_p^+)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}} = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_p t+\mathrm{i}px}\hat{a}_p + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_p t-\mathrm{i}px}\hat{b}_p^+).$$

Определение: если в операторе поля стоит

- оператор уничтожения $\hat{a}_p$, пространственно-временной фактор $\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_p t + \mathrm{i}px)$ - частица,
- оператор рождения $\hat{b}_p^+$, пространственно-временной фактор $\exp(+\mathrm{i}\varepsilon_p t - \mathrm{i}px)$ - античастица.

Трактовка. Античастица - частица, живущая в обратном времени: уничтожение заменяется на рождение, время $t \to -t$ и, следовательно, импульс $p \to -p$.
У вещественного скалярного поля частица совпадает с античастицей.

Простые вычисления

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t\hat{a}^+\hat{a}} = \sum_{k=1} \frac{(\mathrm{i}\varepsilon t)^k}{k!}(\hat{a}^+\hat{a})^k,$$

$$\hat{a}^+\hat{a}\,\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^+ - 1)\hat{a} = \hat{a}(\hat{a}^+\hat{a} - 1),$$

$$(\hat{a}^+\hat{a})^2\hat{a} = \hat{a}^+\hat{a}\,\hat{a}(\hat{a}^+\hat{a} - 1) = \hat{a}(\hat{a}^+\hat{a} - 1)^2,$$

$$(\hat{a}^+\hat{a})^k\hat{a} = \hat{a}(\hat{a}^+\hat{a} - 1)^k,$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t\hat{a}^+\hat{a}}\,\hat{a} = \hat{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t(\hat{a}^+\hat{a}-1)}.$$

Лагранжиан свободного комплексного скалярного поля (12) инвариантен не только относительно преобразований группы Пуанкаре, но и относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\phi(x,t) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\phi(x,t), \quad \omega = \mathrm{const}.$$

Локализовав эти преобразования, получим лагранжиан комплексного скалярного поля, взаимодействующего с полем калибровочным ($A^\mu(x,t)$):

$$L = \int \mathrm{d}^d x \left([\partial_\mu + \mathrm{i} A_\mu(x,t)]\bar{\phi}(x,t)\; [\partial^\mu - \mathrm{i} A^\mu(x,t)]\phi(x,t) - m^2 \bar{\phi}(x,t)\phi(x,t) \right).$$

Действительно, пусть $\phi(x,t) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x,t)}\phi(x,t)$, тогда

$$\partial_\mu \phi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x,t)}(\partial_\mu \phi + \mathrm{i}\phi \partial_\mu \omega),$$

и условие сохранения инвариантности требует введения поля $A_\mu(x,t)$, которое изменяет вид производной

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i} A_\mu,$$

и при калибровочных преобразованиях ведет себя следующим образом

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \omega.$$

Такая модификация лагранжиана не содержит производных по времени от поля $A_\mu(x,t)$. То есть, так введенное поле можно рассматривать только как внешнее. Чтобы замкнуть систему, добавим к лагранжиану простейший динамический член, который должен быть инвариантен относительно преобразований как калибровочных, так и Пуанкаре:

$$L_{\text{field}} = \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

VI. Спинорное поле

Рассмотрим квантовую теорию в фоковском пространстве свободных частиц с массой m и спином $s = 1/2$. В качестве полного набора одночастичных операторов, необходимого для построения фоковского пространства, выберем операторы $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$, $\hat{\sigma}_z$. Гамильтониан такой теории

$$\hat{H} = \sum_{p,\sigma} \varepsilon_p \hat{a}^+_{p,\sigma}\hat{a}_{p,\sigma}, \quad \varepsilon_p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2},\ p = \{p_x, p_y, p_z\},\ \sigma = \uparrow, \downarrow .$$

Задача - избавиться от корня $\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2}$:

- для скалярного поля - гамильтониан осциллятора (возведение корня в квадрат)

$$\hat{h}_{osc} = \varepsilon_p \hat{a}^+_p \hat{a}_p \equiv \frac{1}{2}(\hat{p}_p^2 + \varepsilon_p^2 \hat{q}_p^2),$$

- сейчас - теория Дирака (извлечение корня квадратного)

$$\pm\varepsilon_p|\phi\rangle = (\hat{\alpha}_i\hat{p}_i + m\hat{\beta})|\phi\rangle,$$

где

$$\hat{\alpha}_i = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{Vmatrix}, \; i = 1, 2, 3 \quad \hat{\beta} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Дираковская картина квантовой механики релятивистского электрона намекает, что набор частиц нужно удвоить

$$\hat{H} = \sum_{p,\sigma} \varepsilon_p \big[\hat{a}^+_{p,\sigma}\hat{a}_{p,\sigma} + \hat{b}^+_{p,\sigma}\hat{b}_{p,\sigma}\big].$$

Для вложения этой теории в пространство есть *два* полных набора собственных состояний указанных одночастичных операторов

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}}{\sqrt{V}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}}{\sqrt{V}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

здесь $\mathrm{px} = p_x x + p_y y + p_z z$. Объединим их в *один*, просто удвоив число компонент в столбцах

$$u^0_{p,\uparrow}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}}{\sqrt{V}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad u^0_{p,\downarrow}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}}{\sqrt{V}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad v^0_{p,\uparrow}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}}{\sqrt{V}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad v^0_{p,\downarrow}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}}{\sqrt{V}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Столбцы в приведенных выражениях - собственные состояния гамильтониана Дирака с собственными значениями энергии $\pm m$. Выполним унитарное преобразование, переводящее эти столбцы в собственные состояния гамильтониана Дирака с собственными значениями $\pm\varepsilon_p$. Тем же преобразованием подкрутим и операторы рождения и уничтожения (гамильтониан и канонические коммутационные (или антикоммутационные) соотношения сохранят при этом свой вид).

$$\begin{Vmatrix} u_{p,s}(x) \\ v_{p,s}(x) \end{Vmatrix} = U \begin{Vmatrix} u^0_{p,\sigma}(x) \\ v^0_{p,\sigma}(x) \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \hat{a}_{p,s} \\ \hat{b}_{p,s} \end{Vmatrix} = U \begin{Vmatrix} \hat{a}_{p,\sigma} \\ \hat{b}_{p,\sigma} \end{Vmatrix} U^{-1},$$

где унитарная матрица U размером 4×4 имеет вид

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p(\varepsilon_p + m)}} \begin{Vmatrix} \varepsilon_p + m & -p_i\hat{\sigma}_i \\ p_i\hat{\sigma}_i & \varepsilon_p + m \end{Vmatrix}.$$

Состояния $u_{p,s}(x)$, $v_{p,s}(x)$ ортонормированные

$$\int \mathrm{d}^3x\, u^+_{p_1,s_1}(x) u_{p_2,s_2}(x) = \delta_{p_1,p_2}\delta_{s_1,s_2}, \quad \int \mathrm{d}^3x\, v^+_{p_1,s_1}(x) v_{p_2,s_2}(x) = \delta_{p_1,p_2}\delta_{s_1,s_2}. \tag{13}$$

Действие, определяющее показатель экспоненты в континуальном интеграле для ядра оператора эволюции при нулевых граничных значениях голоморфных переменных, имеет вид

$$\mathrm{i}S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \sum_{p,s} \big[\dot{\bar{\alpha}}_{p,s}(\tau)\alpha_{p,s}(\tau) + \dot{\bar{\beta}}_{p,s}(\tau)\beta_{p,s}(\tau) - \mathrm{i}\varepsilon_p(\bar{\alpha}_{p,s}(\tau)\alpha_{p,s}(\tau) + \bar{\beta}_{p,s}(\tau)\beta_{p,s}(\tau))\big].$$

Первый член проинтегрируем по частям и воспользуемся условиями ортонормированности (13), прочитав их справа налево,

$$\begin{aligned} S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3x &\\ \sum_{p_1,p_2,s_1,s_2} &\big[\mathrm{i}\bar{\alpha}_{p_2,s_2} u^+_{p_2,s_2}(x) u_{p_1,s_1}(x)\dot{\alpha}_{p_1,s_1} - \mathrm{i}\dot{\bar{\beta}}_{p_1,s_1} v^+_{-p_2,s_2}(x) v_{-p_1,s_1}(x)\beta_{p_2,s_2} - \\ &- \bar{\alpha}_{p_2,s_2} u^+_{p_2,s_2}(x)\varepsilon_{p_1} u_{p_1,s_1}(x)\alpha_{p_1,s_1} + \bar{\beta}_{p_1,s_1} v^+_{-p_2,s_2}(x)\varepsilon_{p_1} v_{-p_1,s_1}(x)\beta_{p_2,s_2}\big]. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $\varepsilon_p u_{p,s}(x) = (\hat{\alpha}_i\hat{p}_i + m\hat{\beta})u_{p,s}(x)$, $\varepsilon_p v_{-p,s}(x) = -(\hat{\alpha}_i\hat{p}_i + m\hat{\beta})v_{-p,s}(x)$:

$$\begin{aligned} S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3x \sum_{p_1,p_2,s_1,s_2} &\Big[\bar{\alpha}_{p_2,s_2} u^+_{p_2,s_2}(x)\big[\mathrm{i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\tau} - \hat{\alpha}_i\hat{p}_i - m\hat{\beta}\big] u_{p_1,s_1}(x)\alpha_{p_1,s_1} - \\ &- \bar{\beta}_{p_1,s_1} v^+_{-p_2,s_2}(x)\big[\mathrm{i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\tau} - \hat{\alpha}_i\hat{p}_i - m\hat{\beta}\big] v_{-p_1,s_1}(x)\beta_{p_2,s_2}\Big]. \end{aligned}$$

Если предположить, что интегрирование ведется по грассмановым переменным (*фермионы*), то меняя местами $\bar{\beta}_{p_1,s_1}$ и β_{p_2,s_2}, получаем

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3x\, \psi^+(\tau,x)[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\tau} - \hat{\alpha}_i\hat{p}_i - m\hat{\beta}]\psi(\tau,x),$$

$$\psi(\tau,x) = \sum_{p,s}\big(\alpha_{p,s}(\tau)u_{p,s}(x) + \bar{\beta}_{p,s}(\tau)v_{-p,s}(x)\big),$$

использовано, что $\int \mathrm{d}^3x\, u^+_{p_1,s_1}(x)v_{p_2,s_2}(x) = 0$.

Для придания релятивистски инвариантного вида вводятся новые переменные

$$\gamma^0 \equiv \hat{\beta},\ \gamma^i \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_i, \quad \gamma^\mu = (\gamma^0,\gamma^i), \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},$$

$$\bar{\psi}(\tau,x) \equiv \psi^+(\tau,x)\gamma^0.$$

Действие спинорного поля принимает вид

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3 x\, \bar{\psi}(\tau, x)\big(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m\big)\psi(\tau, x),$$

при этом важно понимать, что спинорное поле $\bar{\psi}(\tau, x), \psi(\tau, x)$ – грассманово. Выражение для поля также переписывается в другом виде из-за введения "релятивистски ковариантной нормировки":

$$\mathrm{u}_{p,s} = \sqrt{\frac{\varepsilon_p V}{m}} u_{p,s}(0),\ \mathrm{v}_{p,s} = \sqrt{\frac{\varepsilon_p V}{m}} v_{-p,s}(0), \quad \bar{\mathrm{u}}_{p,s} = \mathrm{u}^+_{p,s}\gamma^0,\ \bar{\mathrm{v}}_{p,s} = \mathrm{v}^+_{p,s}\gamma^0,$$
$$\bar{\mathrm{u}}_{p,s_1}\mathrm{u}_{p,s_2} = \delta_{s_1,s_2}, \quad \bar{\mathrm{v}}_{p,s_1}\mathrm{v}_{p,s_2} = -\delta_{s_1,s_2}, \quad \bar{\mathrm{u}}_{p,s_1}\mathrm{v}_{p,s_2} = 0.$$

Операторы спинорного поля

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon_p V}} \big(\hat{a}_{p,s}\mathrm{u}_{p,s}\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}} + \hat{b}^+_{p,s}\mathrm{v}_{p,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{ipx}}\big),\ \hat{\bar{\psi}}(x) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon_p V}} \big(\hat{a}^+_{p,s}\bar{\mathrm{u}}_{p,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{ipx}} + \hat{b}_{p,s}\bar{\mathrm{v}}_{p,s}\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}\big).$$

Задача: построить для спинорного поля генераторы группы Пуанкаре и убедиться, что теория свободного спинорного поля Пуанкаре-ковариантна.

Действие спинорного поля инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\psi(\tau, x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\psi(\tau, x), \quad \bar{\psi}(\tau, x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{\psi}(\tau, x).$$

Таким образом, возможно взаимодействие спинорного поля с электромагнитным. Квантовая теория взаимодействующих спинорного и электромагнитного полей называется квантовой электродинамикой (QED). Действие квантовой электродинамики

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3 x \Big[\bar{\psi}\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu) - m\big)\psi - \frac{1}{4e^2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\Big]. \quad (14)$$

VII. Квантование электромагнитного сектора QED

Лагранжиан электромагнитного сектора

$$L = \int_V \mathrm{d}^3 x \Big[j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\Big],$$

здесь $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ – 4-плотность тока, причем из уравнений движения спинорного поля следует, что $\partial_\mu j^\mu = 0$. Кроме того, переопределен 4-вектор-потенциал $A^\mu \to eA^\mu$.

Ограничим область исследуемого поля объемом $V\,(-L_x < x < L_x,\, -L_y < y < L_y,\, -L_z < z < L_z)$ и перейдем к рядам Фурье по пространственным координатам (см. квантование скалярного поля):

$$A^\mu(\tau,\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} A^\mu_{\mathrm{k}}(\tau),\ j^\mu(\tau,\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} j^\mu_{\mathrm{k}}(\tau), \quad \mathrm{kx} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

В этом случае лагранжиан можно переписать в виде

$$L = \sum_{\mathrm{k}}\Big[\frac{1}{2}\big[(\dot A^i_{\mathrm{k}} + \mathrm{ik}^i A^0_{\mathrm{k}})(\dot A^i_{-\mathrm{k}} - \mathrm{ik}^i A^0_{-\mathrm{k}}) - (\delta^{ij}\mathrm{k}^2 - \mathrm{k}^i\mathrm{k}^j)A^i_{\mathrm{k}}A^j_{-\mathrm{k}}\big] + j^0_{\mathrm{k}}A^0_{-\mathrm{k}} - j^i_{\mathrm{k}}A^i_{-\mathrm{k}}\Big], \quad i,j = 1,2,3.$$

Множество всех k можно разбить на пары k, −k. Выберем из пары только одного представителя. Множество таких k обозначим K_+, а множество всех оставшихся k - K_-, см. квантование скалярного поля. И учитывая, что 4-вектор-потенциал и плотность тока величины действительные, получим

$$L = \sum_{\mathrm{k}\in K_+}\big[(\dot{\bar A}^i_{\mathrm{k}} - \mathrm{ik}^i \bar A^0_{\mathrm{k}})(\dot A^i_{\mathrm{k}} + \mathrm{ik}^i A^0_{\mathrm{k}}) - (\delta^{ij}\mathrm{k}^2 - \mathrm{k}^i\mathrm{k}^j)\bar A^i_{\mathrm{k}}A^j_{\mathrm{k}} + j^0_{\mathrm{k}}\bar A^0_{\mathrm{k}} + \bar j^0_{\mathrm{k}}A^0_{\mathrm{k}} - j^i_{\mathrm{k}}\bar A^i_{\mathrm{k}} - \bar j^i_{\mathrm{k}}A^i_{\mathrm{k}}\big].$$

Как и раньше положим $A^\mu_{\mathrm{k}} = (Q^\mu_{\mathrm{k}} + \mathrm{i}q^\mu_{\mathrm{k}})/\sqrt{2}$, тогда

$$L = \sum_{\mathrm{k}\in K_+}\Big[\frac{1}{2}\big[(\dot Q^i_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}^i q^0_{\mathrm{k}})(\dot Q^i_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}^i q^0_{\mathrm{k}}) + (\dot q^i_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}^i Q^0_{\mathrm{k}})(\dot q^i_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}^i Q^0_{\mathrm{k}}) - (\delta^{ij}\mathrm{k}^2 - \mathrm{k}^i\mathrm{k}^j)(Q^i_{\mathrm{k}}Q^j_{\mathrm{k}} + q^i_{\mathrm{k}}q^j_{\mathrm{k}})\big] +$$
$$+ \sqrt{2}\big[Q^0_{\mathrm{k}}\Re j^0_{\mathrm{k}} + q^0_{\mathrm{k}}\Im j^0_{\mathrm{k}} - Q^i_{\mathrm{k}}\Re j^i_{\mathrm{k}} - q^i_{\mathrm{k}}\Im j^i_{\mathrm{k}}\big]\Big].$$

Кроме того, разложим вектора $Q^i_{\mathrm{k}}, q^i_{\mathrm{k}}$, $i = 1,2,3$, по базису $e^i_l, e^i_{\mathrm{k}\lambda}$, $\lambda = 1,2$. Единичный вектор e^i_l направлен вдоль вектора k^i, а вектора $e^i_{\mathrm{k}\lambda}$ лежат в плоскости, перпендикулярной k^i, и взаимно перпендикулярны.

$$Q^i_{\mathrm{k}} = e^i_l Q^l_{\mathrm{k}} + e^i_{\mathrm{k}\lambda}Q^\lambda_{\mathrm{k}}, \quad q^i_{\mathrm{k}} = e^i_l q^l_{\mathrm{k}} + e^i_{\mathrm{k}\lambda}q^\lambda_{\mathrm{k}},$$

(по повторяющимся индексам λ – суммирование). В этих переменных лагранжиан примет вид

$$L = \sum_{\mathrm{k}\in K_+}\big[L_\Re(Q^l_{\mathrm{k}}, \dot Q^l_{\mathrm{k}}; Q^\lambda_{\mathrm{k}}, \dot Q^\lambda_{\mathrm{k}}; q^0_{\mathrm{k}}) + L_\Im(q^l_{\mathrm{k}}, \dot q^l_{\mathrm{k}}; q^\lambda_{\mathrm{k}}, \dot q^\lambda_{\mathrm{k}}; Q^0_{\mathrm{k}})\big], \tag{15}$$

$$L_\Re = \frac{1}{2}(\dot Q^\lambda_{\mathrm{k}}\dot Q^\lambda_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}^2 Q^\lambda_{\mathrm{k}}Q^\lambda_{\mathrm{k}}) + \frac{1}{2}(\dot Q^l_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}q^0_{\mathrm{k}})^2 + \sqrt{2}(q^0_{\mathrm{k}}\Im j^0_{\mathrm{k}} - Q^l_{\mathrm{k}}\Re j^l_{\mathrm{k}} - Q^\lambda_{\mathrm{k}}\Re j^\lambda_{\mathrm{k}}),$$
$$L_\Im = \frac{1}{2}(\dot q^\lambda_{\mathrm{k}}\dot q^\lambda_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}^2 q^\lambda_{\mathrm{k}}q^\lambda_{\mathrm{k}}) + \frac{1}{2}(\dot q^l_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}Q^0_{\mathrm{k}})^2 + \sqrt{2}(Q^0_{\mathrm{k}}\Re j^0_{\mathrm{k}} - q^l_{\mathrm{k}}\Im j^l_{\mathrm{k}} - q^\lambda_{\mathrm{k}}\Im j^\lambda_{\mathrm{k}}).$$

Уравнение непрерывности для плотности тока

$$\Re\dot{j}^0_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}\Im j^l_{\mathrm{k}} = 0,\ \Im\dot{j}^0_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}\Re j^l_{\mathrm{k}} = 0.$$

Лагранжиан разбился на две независимые части, поэтому дальнейшее рассмотрение проведем для одной из них (другая анализируется аналогично).

Перейдем к гамильтонову формализму, необходимому для канонического квантования. Но: лагранжиан вообще не зависит от переменной $\dot{q}^0_{\mathrm{k}}$, и соответствующий ей обобщенный импульс обращается в нуль. Теория *особенная*. Перейдем к обобщенным импульсам для тех переменных, для которых это возможно:

$$P^\lambda_{\mathrm{k}} = \frac{\partial L_\Re}{\partial \dot{Q}^\lambda_{\mathrm{k}}} = \dot{Q}^\lambda_{\mathrm{k}}, \quad P^l_{\mathrm{k}} = \frac{\partial L_\Re}{\partial \dot{Q}^l_{\mathrm{k}}} = \dot{Q}^l_{\mathrm{k}} - \mathrm{k}q^0_{\mathrm{k}},$$

выпишем действие в гамильтоновом формализме.

- Итак,

$$S_\Re = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \sum_{\mathrm{k}\in K_+} \Big[P^l_{\mathrm{k}}\dot{Q}^l_{\mathrm{k}} + P^\lambda_{\mathrm{k}}\dot{Q}^\lambda_{\mathrm{k}} - H_\Re(P^l_{\mathrm{k}}, Q^l_{\mathrm{k}}; P^\lambda_{\mathrm{k}}, Q^\lambda_{\mathrm{k}}) + \lambda_\Re f_\Re(P^l_{\mathrm{k}}, Q^l_{\mathrm{k}})\Big].$$

- Гамильтониан

$$H_\Re = \frac{1}{2}\big(P^\lambda_{\mathrm{k}}P^\lambda_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}^2 Q^\lambda_{\mathrm{k}}Q^\lambda_{\mathrm{k}}\big) + \sqrt{2}Q^\lambda_{\mathrm{k}}\Re j^\lambda_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}(P^l_{\mathrm{k}})^2 + \sqrt{2}Q^l_{\mathrm{k}}\Re j^l_{\mathrm{k}}.$$

- Множитель Лагранжа

$$\lambda_\Re = -q^0_{\mathrm{k}}.$$

- Связь (первого рода)

$$f_\Re = \mathrm{k}P^l_{\mathrm{k}} - \sqrt{2}\Im j^0_{\mathrm{k}}.$$

Теория со связями не пригодна для непосредственного канонического квантования. В ней нужно выделить *независимые канонические переменные* и именно на них наложить канонические коммутационные соотношения. Для этого рассмотрим классические уравнения движения рассматриваемой теории.

Четыре уравнения движения на поперечные компоненты

$$\dot{Q}^\lambda_{\mathrm{k}} = P^\lambda_{\mathrm{k}}, \quad \dot{P}^\lambda_{\mathrm{k}} = -\mathrm{k}^2 Q^\lambda_{\mathrm{k}} - \sqrt{2}\Re j^\lambda_{\mathrm{k}}.$$

Два уравнения на продольные компоненты

$$\dot{Q}^l_{\mathrm{k}} = P^l_{\mathrm{k}} + q^0_{\mathrm{k}}\mathrm{k}, \quad \dot{P}^l_{\mathrm{k}} = -\sqrt{2}\Re j^l_{\mathrm{k}},$$

и уравнение связи

$$\mathrm{k}P^l_{\mathrm{k}} - \sqrt{2}\Im j^0_{\mathrm{k}} = 0.$$

Переменные разделились: есть четыре уравнения на четыре переменные $P^\lambda_{\mathrm{k}}, Q^\lambda_{\mathrm{k}}$, $\lambda = 1, 2$, и три уравнения на три переменные $P^l_{\mathrm{k}}, Q^l_{\mathrm{k}}, q^0_{\mathrm{k}}$.

Продифференцируем по времени уравнение связи и воспользуемся уравнением непрерывности на плотность тока

$$0 = \mathrm{k}\dot{P}^l_{\mathrm{k}} - \sqrt{2}\Im \dot{j}^0_{\mathrm{k}} = \mathrm{k}(\dot{P}^l_{\mathrm{k}} + \sqrt{2}\Re j^l_{\mathrm{k}}).$$

Отсюда следует, что из трех уравнений на $P^l_{\mathrm{k}}, Q^l_{\mathrm{k}}, q^0_{\mathrm{k}}$ не зависимы лишь два

$$\mathrm{k}P^l_{\mathrm{k}} - \sqrt{2}\Im j^0_{\mathrm{k}} = 0, \quad \dot{Q}^l_{\mathrm{k}} = P^l_{\mathrm{k}} + q^0_{\mathrm{k}}\mathrm{k}.$$

Таким образом, число независимых уравнений меньше, чем число определяемых переменных. Следовательно, какую-нибудь одну переменную (или функцию от переменных) можно произвольным образом зафиксировать – наложить калибровку. Требование к такой фиксации только одно – решение независимых уравнений для оставшихся переменных должно быть единственным (условие допустимости калибровки).

В рассматриваемом случае все достаточно просто. Из первого уравнения находим продольный обобщенный импульс

$$P^l_{\mathrm{k}} = \frac{1}{\mathrm{k}}\sqrt{2}\Im j^0_{\mathrm{k}}.$$

Если выбрать калибровку в виде

$$Q^l_{\mathrm{k}} = 0,$$

то переменная q^0_{k} определяется однозначно и равна

$$q^0_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{\mathrm{k}}P^l_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{\mathrm{k}^2}\sqrt{2}\Im j^0_{\mathrm{k}}.$$

Таким образом, изначальное 6-мерное фазовое пространства $(P^i_{\mathrm{k}}, Q^i_{\mathrm{k}})$ теории после наложения связи и калибровки превращается в 4-мерное фазовое пространство с независимыми переменными $(P^\lambda_{\mathrm{k}}, Q^\lambda_{\mathrm{k}})$ без каких-либо связей с гамильтонианом

$$H_{\Re} = \frac{1}{2}\left[P^\lambda_{\mathrm{k}} P^\lambda_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}^2 Q^\lambda_{\mathrm{k}} Q^\lambda_{\mathrm{k}}\right] + \sqrt{2}Q^\lambda_{\mathrm{k}}\Re j^\lambda_{\mathrm{k}} + \frac{1}{\mathrm{k}^2}(\Im j^0_{\mathrm{k}})^2.$$

Аналогичные рассуждения для другого сектора

$$p^l_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{\mathrm{k}}\sqrt{2}\Re j^0_{\mathrm{k}},\ q^l_{\mathrm{k}} = 0,\ Q^0_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{\mathrm{k}^2}\sqrt{2}\Re j^0_{\mathrm{k}},\ H_{\Im} = \frac{1}{2}\left[p^\lambda_{\mathrm{k}} p^\lambda_{\mathrm{k}} + \mathrm{k}^2 q^\lambda_{\mathrm{k}} q^\lambda_{\mathrm{k}}\right] + \sqrt{2} q^\lambda_{\mathrm{k}} \Im j^\lambda_{\mathrm{k}} + \frac{1}{\mathrm{k}^2}(\Re j^0_{\mathrm{k}})^2.$$

Дальнейшее квантование теперь не составит труда (см. скалярное поле). Частицы электромагнитного поля (фотоны) характеризуются импульсом $\mathrm{k} = (k_x, k_y, k_z)$ и поляризацией ($\lambda = 1, 2$), их массы равны нулю. Операторы рождения и уничтожения таких частиц подчиняются каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{c}_{\mathrm{k}_1,\lambda_1}, \hat{c}^+_{\mathrm{k}_2,\lambda_2}] = \delta_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2}\delta_{\lambda_1,\lambda_2}, \quad [\hat{c}_{\mathrm{k}_1,\lambda_1}, \hat{c}_{\mathrm{k}_2,\lambda_2}] = [\hat{c}^+_{\mathrm{k}_1,\lambda_1}, \hat{c}^+_{\mathrm{k}_2,\lambda_2}] = 0.$$

Гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_{\mathrm{k},\lambda} \omega_{\mathrm{k}} \hat{c}^+_{\mathrm{k},\lambda}\hat{c}_{\mathrm{k},\lambda} + \sum_{\mathrm{k},\lambda} \frac{e^i_{\mathrm{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_{\mathrm{k}}}}\left(\hat{c}^+_{\mathrm{k},\lambda} - \hat{c}_{-\mathrm{k},\lambda}\right)\hat{j}^i_{\mathrm{k}} + \sum_{\mathrm{k}} \frac{1}{2\mathrm{k}^2}\hat{j}^0_{\mathrm{k}}\hat{j}^0_{-\mathrm{k}}, \quad \omega_{\mathrm{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2},$$

(использовано, что при $\mathrm{k} \to -\mathrm{k}$ вектор поляризации $e^i_{\mathrm{k}\lambda} \to -e^i_{\mathrm{k}\lambda}$).

Выражения для поля

$$\hat{A}^0(\mathrm{x}) = -\sum_{\mathrm{k}} \frac{1}{\sqrt{V}\mathrm{k}^2}\hat{j}^0_{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}}, \quad \hat{A}^i(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k},\lambda} \frac{e^i_{\mathrm{k}\lambda}}{\sqrt{2V\omega_{\mathrm{k}}}}\left[\hat{c}_{\mathrm{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} + \hat{c}^+_{\mathrm{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\right].$$

VIII. Ядро оператора эволюции в QED

Классическое действие электродинамики

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3x \left[\bar{\psi}\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu) - m\big)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\right].$$

Это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau,\mathrm{x})}\psi,\ \bar{\psi} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\tau,\mathrm{x})}\bar{\psi},\ A_\mu \to A_\mu - \mathrm{ie}^{-\mathrm{i}\omega(\tau,\mathrm{x})}\partial_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau,\mathrm{x})}.$$

Оно было представлено в виде

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}^3x\, \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau\, L,$$

где L – лагранжиан электромагнитного сектора QED (15).

Результаты квантования.

- QED представляет собой с точки зрения квантовой теории следующий набор частиц – фотоны, электроны и позитроны.

- Электроны и позитроны – частицы со спином, равным 1/2, массой m и зарядами, равными по величине e, но с противоположными знаками (частица - античастица). Их операторы рождения и уничтожения подчиняются каноническим антикоммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_{p_1,s_1}, \hat{a}^+_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{b}_{p_1,s_1}, \hat{b}^+_{p_2,s_2}]_+ = \delta_{p_1,p_2}\delta_{s_1,s_2},$$

$$[\hat{a}_{p_1,s_1}, \hat{a}_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{a}^+_{p_1,s_1}, \hat{a}^+_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{b}_{p_1,s_1}, \hat{b}_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{b}^+_{p_1,s_1}, \hat{b}^+_{p_2,s_2}]_+ = 0,$$

$$[\hat{a}_{p_1,s_1}, \hat{b}_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{a}_{p_1,s_1}, \hat{b}^+_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{a}^+_{p_1,s_1}, \hat{b}_{p_2,s_2}]_+ = [\hat{a}^+_{p_1,s_1}, \hat{b}^+_{p_2,s_2}]_+ = 0.$$

Электрон-позитронное поле

$$\hat{\psi}(\mathrm{x}) = \sum_{p,s} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon_p V}} \big(\hat{a}_{p,s}\mathrm{u}_{p,s}\mathrm{e}^{\mathrm{ipx}} + \hat{b}^+_{p,s}\mathrm{v}_{p,s}\mathrm{e}^{-\mathrm{ipx}}\big).$$

- Фотоны – частицы с массой, равной нулю, и двумя независимыми поляризациями $e^i_{\mathrm{k}\lambda}$, $\lambda = 1, 2$, перпендикулярными направлению импульса ($k^i e^i_{\mathrm{k}\lambda} = 0$), электрически нейтральны. Операторы рождения и уничтожения подчиняются каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{c}_{\mathrm{k}_1,\lambda_1}, \hat{c}^+_{\mathrm{k}_2,\lambda_2}] = \delta_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2}\delta_{\lambda_1,\lambda_2}, \quad [\hat{c}_{\mathrm{k}_1,\lambda_1}, \hat{c}_{\mathrm{k}_2,\lambda_2}] = [\hat{c}^+_{\mathrm{k}_1,\lambda_1}, \hat{c}^+_{\mathrm{k}_2,\lambda_2}] = 0.$$

Операторы рождения (уничтожения) фотона, электрона и позитрона коммутируют (или антикоммутируют - без разницы) между собой.

Оператор электромагнитного поля

$$\hat{A}^0(\mathrm{x}) = -\sum_{\mathrm{k}} \frac{1}{\sqrt{V}\mathrm{k}^2}\hat{j}^0_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{ikx}}, \quad \hat{A}^i(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k},\lambda} \frac{e^i_{\mathrm{k}\lambda}}{\sqrt{2V\omega_{\mathrm{k}}}}\big[\hat{c}_{\mathrm{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} + \hat{c}^+_{\mathrm{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\big],$$

здесь $\hat{j}^0_{\mathrm{k}}$ – оператор, зависящий от операторов рождения и уничтожения электронов и позитронов, полученный следующим образом

$$\hat{j}^0_{\mathrm{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V \mathrm{dx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\hat{j}^0(\mathrm{x}), \quad \hat{j}^0(\mathrm{x}) = :\hat{\bar{\psi}}(\mathrm{x})\gamma^0\hat{\psi}(\mathrm{x}):,$$

двоеточие справа и слева означает взятие нормального произведения (это определяет заряд вакуумного состояния в пространстве Фока, равным нулю).

- Гамильтониан QED
$$\hat{H} = \hat{H}_{ep} + \hat{H}_{ph} + \hat{H}_{int},$$
здесь гамильтониан свободных электронов и позитронов
$$\hat{H}_{ep} = \sum_{\mathrm{p},s} \varepsilon_{\mathrm{p}} \big(\hat{a}^{+}_{\mathrm{p},s}\hat{a}_{\mathrm{p},s} + \hat{b}^{+}_{\mathrm{p},s}\hat{b}_{\mathrm{p},s}\big), \quad \varepsilon_{\mathrm{p}} = \sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2},$$
гамильтониан свободных фотонов
$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathrm{k},\lambda} \omega_{\mathrm{k}} \hat{c}^{+}_{\mathrm{k},\lambda}\hat{c}_{\mathrm{k},\lambda}, \quad \omega_{\mathrm{k}} = \sqrt{\mathrm{k}^2},$$
гамильтониан взаимодействия
$$\hat{V}_{int} = \sum_{\mathrm{k},\lambda} \frac{e^i_{\mathrm{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_{\mathrm{k}}}} \big(\hat{c}^{+}_{\mathrm{k},\lambda} - \hat{c}_{-\mathrm{k},\lambda}\big)\hat{j}^i_{\mathrm{k}} + \sum_{\mathrm{k}} \frac{1}{2\mathrm{k}^2}\hat{j}^0_{\mathrm{k}}\hat{j}^0_{-\mathrm{k}},$$
оператор $\hat{j}^i_{\mathrm{k}}$ построен аналогично оператору $\hat{j}^0_{\mathrm{k}}$ из оператора плотности тока $\hat{j}^i(\mathrm{x}) =: \hat{\bar{\psi}}(\mathrm{x})\gamma^i\hat{\psi}(\mathrm{x}) :.$

Для вычисления физических величин в квантовой теории поля необходимо знать как изменяется состояние исследуемой системы с течением времени. Этот процесс описывается ядром оператора эволюции. В нашей схеме ядро оператора эволюции представлено в виде континуального интеграла (см. (IV))
$$U(\bar{a}_{\mathrm{p},s}, \bar{b}_{\mathrm{p},s}, \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}; a_{\mathrm{p},s}, b_{\mathrm{p},s}, c_{\mathrm{k},\lambda}|t_f - t_i) = \int_\gamma \mathcal{D}\bar{a}(\tau)\mathcal{D}a(\tau)\mathcal{D}\bar{b}(\tau)\mathcal{D}b(\tau)\mathcal{D}\bar{c}(\tau)\mathcal{D}c(\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\gamma]},$$
траектории γ
$$\gamma: \ \bar{a}_{\mathrm{p},s}(t_f) = \bar{a}_{\mathrm{p},s}, \bar{b}_{\mathrm{p},s}(t_f) = \bar{b}_{\mathrm{p},s}, \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}(t_f) = \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}; a_{\mathrm{p},s}(t_i) = a_{\mathrm{p},s}, b_{\mathrm{p},s}(t_i) = b_{\mathrm{p},s}, c_{\mathrm{k},\lambda}(t_i) = c_{\mathrm{k},\lambda},$$
действие, заданное на траекториях γ,
$$S[\gamma] = S_{ep}[\gamma] + S_{ph}[\gamma] + S_{int}[\gamma],$$
действие свободного электрон-позитронного поля
$$\mathrm{i}S_{ep}[\gamma] = \sum_{\mathrm{p},s}\big(\bar{a}_{\mathrm{p},s}(t_i)a_{\mathrm{p},s} + \bar{b}_{\mathrm{p},s}(t_i)b_{\mathrm{p},s}\big) +$$
$$+ \int_\gamma \mathrm{d}\tau \sum_{\mathrm{p},s}\Big[(\partial_\tau\bar{a}_{\mathrm{p},s}(\tau))a_{\mathrm{p},s}(\tau) + (\partial_\tau\bar{b}_{\mathrm{p},s}(\tau))b_{\mathrm{p},s}(\tau) - \mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{p}}\big(\bar{a}_{\mathrm{p},s}(\tau)a_{\mathrm{p},s}(\tau) + \bar{b}_{\mathrm{p},s}(\tau)b_{\mathrm{p},s}(\tau)\big)\Big],$$

действие электромагнитной волны

$$\mathrm{i}S_{ph}[\gamma] = \sum_{\mathrm{k},\lambda} \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}(t_i) c_{\mathrm{k},\lambda} + \int_\gamma \mathrm{d}\tau \sum_{\mathrm{k},\lambda} \big[(\partial_\tau \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}(\tau)) c_{\mathrm{k},\lambda}(\tau) - \mathrm{i}\omega_{\mathrm{k}} \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}(\tau) c_{\mathrm{k},\lambda}(\tau)\big],$$

взаимодействие описывается действием вида

$$\mathrm{i}S_{int}[\gamma] = -\mathrm{i}\int_\gamma \mathrm{d}\tau \sum_{\mathrm{k}} \Big[A^i_{\mathrm{k}} j^i_{-\mathrm{k}} + \frac{1}{2\mathrm{k}^2} j^0_{\mathrm{k}} j^0_{-\mathrm{k}}\Big],$$

причем фурье-компонента вектор-потенциала A^i_{k} выражается через комплексные переменные $\bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}(\tau), c_{\mathrm{k},\lambda}(\tau)$, которые подставлены вместо операторов рождения и уничтожения, соответственно. Аналогично фурье-компонента 4-плотности тока j^μ_{k} выражаются через грассмановы переменные $\bar{a}_{\mathrm{p},s}(\tau), a_{\mathrm{p},s}(\tau), \bar{b}_{\mathrm{p},s}(\tau), b_{\mathrm{p},s}(\tau)$.
Континуальный интеграл определяется своей решеточной аппроксимацией, см. IV.

Итак, взаимодействие в представленной схеме представляет собой взаимное влияние тока электронов (позитронов) и электромагнитного поля и кулоновское взаимодействие плотностей зарядов электронов (позитронов). Такой вид взаимодействия „нарушает“ явную лоренц-инвариантность (например, кулоновское взаимодействие мгновенно). Поэтому выполним ряд математических преобразований восстанавливающих указанную симметрию в явном виде.
Для этого нужно каким-то образом восстановить переменные $P^l_{\mathrm{k}}, Q^l_{\mathrm{k}}, q^0_{\mathrm{k}}$ и др., которые были утеряны в процедуре канонического квантования. Итак, начнем с величины

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\Re,int}} = \exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{\mathrm{k}\in K_+} \Big[\sqrt{2}(Q^\lambda_{\mathrm{k}})^k (\Re j^\lambda_{\mathrm{k}})^k + \frac{1}{\mathrm{k}^2}\big((\Im j^0_{\mathrm{k}})^k\big)^2\Big]\Big].$$

Введем разрешенную связь

$$1 = \prod_{\mathrm{k}\in K_+} \prod_{k=1}^{K-1} \int \mathrm{d}(P^l_{\mathrm{k}})^k \mathrm{k}\, \delta\big(\mathrm{k}(P^l_{\mathrm{k}})^k - \sqrt{2}(\Im j^0_{\mathrm{k}})^k\big),$$

тогда

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\Re,int}} = \prod_{\mathrm{k}\in K_+} \prod_{k=1}^{K-1} \int \mathrm{d}(P^l_{\mathrm{k}})^k \mathrm{k}\, \delta\big(\mathrm{k}(P^l_{\mathrm{k}})^k - \sqrt{2}(\Im j^0_{\mathrm{k}})^k\big) \exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon\Big[\sqrt{2}(Q^\lambda_{\mathrm{k}})^k (\Re j^\lambda_{\mathrm{k}})^k + \frac{1}{2}\big((P^l_{\mathrm{k}})^k\big)^2\Big]\Big].$$

Введем множитель Лагранжа, представив δ-функцию в виде

$$\delta\big(\mathrm{k}(P^l_{\mathrm{k}})^k - \sqrt{2}(\Im j^0_{\mathrm{k}})^k\big) = \int \mathrm{d}(q^0_{\mathrm{k}})^k \frac{\epsilon}{2\pi} \exp\big[-\mathrm{i}\epsilon (q^0_{\mathrm{k}})^k \big(\mathrm{k}(P^l_{\mathrm{k}})^k - \sqrt{2}(\Im j^0_{\mathrm{k}})^k\big)\big].$$

В результате получается следующее выражение

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\Re,int}} = \prod_{\mathrm{k}\in K_+}\prod_{k=1}^{K-1}\int \mathrm{d}(q^0_\mathrm{k})^k \mathrm{d}(P^l_\mathrm{k})^k\,\frac{\epsilon\mathrm{k}}{2\pi}\exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon\mathrm{k}(q^0_\mathrm{k})^k(P^l_\mathrm{k})^k - \mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\big((P^l_\mathrm{k})^k\big)^2\Big]$$
$$\exp\Big[\mathrm{i}\epsilon\sqrt{2}\big[(q^0_\mathrm{k})^k(\Im j^0_\mathrm{k})^k - (Q^\lambda_\mathrm{k})^k(\Re j^\lambda_\mathrm{k})^k\big]\Big].$$

Выполним интегрирование по $(P^l_\mathrm{k})^k$ (переход от гамильтонова к лагранжеву формализму)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\Re,int}} = \prod_{\mathrm{k}\in K_+}\prod_{k=1}^{K-1}\int \mathrm{d}(q^0_\mathrm{k})^k\,\frac{\mathrm{k}\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}}}\exp\Big[\mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\big(\mathrm{k}(q^0_\mathrm{k})^k\big)^2 + \mathrm{i}\epsilon\sqrt{2}\big[(q^0_\mathrm{k})^k(\Im j^0_\mathrm{k})^k - (Q^\lambda_\mathrm{k})^k(\Re j^\lambda_\mathrm{k})^k\big]\Big]. \tag{16}$$

Остается ввести утерянную координату Q^l_k. Сделаем это в несколько этапов. Во первых, определим производную по времени на решетке

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^0_\mathrm{k}\Big|^k = (\dot q^0_\mathrm{k})^k \equiv \frac{1}{\epsilon}\big[(q^0_\mathrm{k})^{k+1} - (q^0_\mathrm{k})^k\big],\quad (q^0_\mathrm{k})^K = 0.$$

Рассмотрим интеграл следующего вида

$$1 = \prod_{\mathrm{k}\in K_+}\prod_{k=1}^{K-1}\mathrm{d}(f_\mathrm{k})^k\,\frac{\sqrt{\mathrm{i}\epsilon}}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\big((f_\mathrm{k})^k + (\dot q^0_\mathrm{k})^k\big)^2\Big].$$

В интеграле сделаем линейную замену переменных

$$(f_\mathrm{k})^k = \frac{1}{\mathrm{k}\epsilon^2}\big[(Q^l_\mathrm{k})^{k+1} - 2(Q^l_\mathrm{k})^k + (Q^l_\mathrm{k})^{k-1} + \epsilon^2\mathrm{k}^2(Q^l_\mathrm{k})^k\big],\ k = 1,\dots,K-1,\quad (Q^l_\mathrm{k})^K = (Q^l_\mathrm{k})^0 = 0,$$

тогда

$$1 = \prod_{\mathrm{k}\in K_+}\det D_\mathrm{k}\prod_{k=1}^{K-1}\mathrm{d}(Q^l_\mathrm{k})^k\,\frac{\sqrt{\mathrm{i}\epsilon}}{\mathrm{k}\epsilon^2\sqrt{2\pi}}\exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((q^0_\mathrm{k})^k + \frac{1}{\mathrm{k}}(\dot Q^l_\mathrm{k})^{k-1}\Big)\Big|^k + \mathrm{k}(Q^l_\mathrm{k})^k\Big]^2\Big],$$

здесь $D^{i,k}_\mathrm{k} = \delta^{i,k+1} + \delta^{i+1,k} - \delta^{i,k}(2 - \epsilon^2\mathrm{k}^2),\ i,k = 1,\dots,K-1.$

Подставим эту единицу в (16) и выполним в получившемся выражении замену переменных $(q^0_\mathrm{k})^k + \frac{1}{\mathrm{k}}(\dot Q^l_\mathrm{k})^{k-1} \to (q^0_\mathrm{k})^k$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\Re,int}} = \prod_{\mathrm{k}\in K_+}\det D_\mathrm{k}\prod_{k=1}^{K-1}\int\frac{\mathrm{d}(q^0_\mathrm{k})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\frac{\mathrm{d}(Q^l_\mathrm{k})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}$$
$$\exp\Big[\mathrm{i}\epsilon\sqrt{2}\Big((q^0_\mathrm{k})^k - \frac{1}{\mathrm{k}}(\dot Q^l_\mathrm{k})^{k-1}\Big)(\Im j^0_\mathrm{k})^k - \mathrm{i}\epsilon\sqrt{2}(Q^\lambda_\mathrm{k})^k(\Re j^\lambda_\mathrm{k})^k\Big]$$
$$\exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\Big[\big((\dot q^0_\mathrm{k})^k + \mathrm{k}(Q^l_\mathrm{k})^k\big)^2 - \big(\mathrm{k}(q^0_\mathrm{k})^k - (\dot Q^l_\mathrm{k})^{k-1}\big)^2\Big]\Big].$$

Сделаем еще один шаг. В выражении для действия свободного электрон-позитронного поля S_{ep} проведем замену $\psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau,\mathrm{x})}\psi$, $\omega(t_f,\mathrm{x}) = \omega(t_i,\mathrm{x}) = 0$ (важно, что такое унитарное преобразование не изменяет меру интегрирования в континуальном интеграле). В этом случае

$$S_{ep} \to S_{ep} - \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{dx}\, \partial_\mu \omega(\tau,\mathrm{x}) j^\mu(\tau,\mathrm{x}) = S_{ep} + \delta S.$$

$$\delta S = \delta S_{\Re} + \delta S_{\Im}, \quad \delta S_{\Im} = -2\epsilon \sum_{\mathrm{k}\in K_+} \sum_{k=1}^{K-1} \big[(\Im\dot{\omega}_{\mathrm{k}})^k (\Im j^0_{\mathrm{k}})^k - \mathrm{k}(\Im\omega_{\mathrm{k}})^k (\Re j^l_{\mathrm{k}})^k\big].$$

Теперь следует выбрать

$$(\Im\omega_{\mathrm{k}})^k = -\frac{1}{\mathrm{k}\sqrt{2}} (Q^l_{\mathrm{k}})^{k-1},$$

именно в этом случае

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\Re,int} + \mathrm{i}\delta S_{\Im}} = \prod_{\mathrm{k}\in K_+} \det D_{\mathrm{k}} \prod_{k=1}^{K-1} \int \frac{\mathrm{d}(q^0_{\mathrm{k}})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \frac{\mathrm{d}(Q^l_{\mathrm{k}})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}$$
$$\exp\big[\mathrm{i}\epsilon\sqrt{2}\big((q^0_{\mathrm{k}})^k (\Im j^0_{\mathrm{k}})^k - (Q^l_{\mathrm{k}})^{k-1} (\Re j^l_{\mathrm{k}})^k - (Q^\lambda_{\mathrm{k}})^k (\Re j^\lambda_{\mathrm{k}})^k\big)\big]$$
$$\exp\Big[-\mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\big[(\dot{q}^0_{\mathrm{k}})^k\big]^2 + \mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\mathrm{k}^2\big[(q^0_{\mathrm{k}})^k\big]^2\Big] \exp\Big[\mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\big[(\dot{Q}^l_{\mathrm{k}})^k\big]^2 - \mathrm{i}\epsilon\frac{1}{2}\mathrm{k}^2\big[(Q^l_{\mathrm{k}})^k\big]^2\Big].$$

Аналогичные рассуждения нужно провести для другого сектора, то есть для переменных $p^l_{\mathrm{k}}, Q^0_{\mathrm{k}}, q^l_{\mathrm{k}}$.

В результате ядро оператора эволюции для QED в обобщенной лоренцевой калибровке представимо в виде

$$U(\bar{a}_{\mathrm{p},s}, \bar{b}_{\mathrm{p},s}, \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}; a_{\mathrm{p},s}, b_{\mathrm{p},s}, c_{\mathrm{k},\lambda} | t_f - t_i) = \int_\Gamma \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A^\mu$$
$$\exp\Big[\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{dx}\,\Big[\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\Big]\Big]. \quad (17)$$

Безусловно, это выражение не более, чем символ, имеющий, правда, большое эвристическое значение. Расшифруем.

- $$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_{\mathrm{p},s} \prod_{k=1}^{K-1} \mathrm{d}(\bar{a}_{\mathrm{p},s})^k \mathrm{d}(a_{\mathrm{p},s})^k \mathrm{d}(\bar{b}_{\mathrm{p},s})^k \mathrm{d}(b_{\mathrm{p},s})^k,$$

  интегрирование ведется по грассмановым переменным.

- $$\mathcal{D}A^\mu = \Big[\prod_{\mathrm{k}\in K_+}(\det D_\mathrm{k})^2\prod_{k=1}^{K-1}\frac{\mathrm{d}(Q^0_\mathrm{k})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\frac{\mathrm{d}(q^0_\mathrm{k})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\frac{\mathrm{d}(Q^l_\mathrm{k})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\frac{\mathrm{d}(q^l_\mathrm{k})^k}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\Big]\ \Big[\prod_{\mathrm{k},\lambda}\prod_{k=1}^{K-1}\mathrm{d}(\bar{c}_{\mathrm{k},\lambda})^k\mathrm{d}(c_{\mathrm{k},\lambda})^k\Big],$$

  интегрирование ведется по физическим комплексным переменным $\bar{c}_{\mathrm{k},\lambda}, c_{\mathrm{k},\lambda}$ и по действительным калибровочным $Q^0_\mathrm{k}, q^0_\mathrm{k}, Q^l_\mathrm{k}, q^l_\mathrm{k}$.

- Решеточная версия свободного электрон-позитронного поля

$$\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}\tau\int_V \mathrm{dx}\,\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{\mathrm{p},s}\Big[\bar{a}^0_{\mathrm{p},s}a_{\mathrm{p},s} + \bar{b}^0_{\mathrm{p},s}b_{\mathrm{p},s}+$$

$$+\,\epsilon\sum_{k=0}^{K-1}\big[(\dot{\bar{a}}_{\mathrm{p},s})^k(a_{\mathrm{p},s})^k + (\dot{\bar{b}}_{\mathrm{p},s})^k(b_{\mathrm{p},s})^k - \mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{p}\big((\bar{a}_{\mathrm{p},s})^{k+1}(a_{\mathrm{p},s})^k + (\bar{b}_{\mathrm{p},s})^{k+1}(b_{\mathrm{p},s})^k\big)\big]\Big],$$

  граничные точки траектории Γ

$$(\bar{a}_{\mathrm{p},s})^K = \bar{a}_{\mathrm{p},s},\ (a_{\mathrm{p},s})^0 = a_{\mathrm{p},s},\quad (\bar{b}_{\mathrm{p},s})^K = \bar{b}_{\mathrm{p},s},\ (b_{\mathrm{p},s})^0 = b_{\mathrm{p},s}.$$

- Действие электромагнитного поля в обобщенной лоренцевой калибровке

$$-\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}\tau\int_V\mathrm{dx}\,\Big[\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\Big] =$$

$$\sum_{\mathrm{k}\in K_+}\epsilon\sum_{k=1}^{K-1}\Big[\frac{1}{2}\Big[\big|(\dot{Q}^l_\mathrm{k}+\mathrm{i}\dot{q}^l_\mathrm{k})^k\big|^2 - \omega^2_\mathrm{k}\big|(Q^l_\mathrm{k}+\mathrm{i}q^l_\mathrm{k})^k\big|^2\Big] - \frac{1}{2}\Big[\big|(\dot{Q}^0_\mathrm{k}+\mathrm{i}\dot{q}^0_\mathrm{k})^k\big|^2 - \omega^2_\mathrm{k}\big|(Q^0_\mathrm{k}+\mathrm{i}q^0_\mathrm{k})^k\big|^2\Big]\Big]+$$

$$+\,\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{\mathrm{k},\lambda}\Big[\bar{c}^0_{\mathrm{k},\lambda}c_{\mathrm{k},\lambda} + \epsilon\sum_{k=0}^{K-1}\big[(\dot{\bar{c}}_{\mathrm{k},\lambda})^k(c_{\mathrm{k},\lambda})^k - \mathrm{i}\omega_\mathrm{k}(\bar{c}_{\mathrm{k},\lambda})^{k+1}(c_{\mathrm{k},\lambda})^k\big]\Big],$$

  граничные точки траектории для переменных физических

$$(\bar{c}_{\mathrm{k},\lambda})^K = \bar{c}_{\mathrm{k},\lambda},\ (c_{\mathrm{k},\lambda})^0 = c_{\mathrm{k},\lambda},$$

  и вспомогательных

$$(Q^l_\mathrm{k})^K = (q^l_\mathrm{k})^K = (Q^l_\mathrm{k})^0 = (q^l_\mathrm{k})^0 = 0,\quad (Q^0_\mathrm{k})^K = (q^0_\mathrm{k})^K = (Q^0_\mathrm{k})^0 = (q^0_\mathrm{k})^0 = 0.$$

Итак, в рассмотренной калибровке явная лоренц-инвариантность восстанавливается за счет введения вспомогательных переменных, действие которых представляет собой действие набора осцилляторов. Интересно, что половина осцилляторов $(Q^0_\mathrm{k}, q^0_\mathrm{k})$ имеют отрицательную массу, что не так уж и страшно, так как реально они не существуют. Есть и формальная разница: интеграл по физическим переменным вычисляется в голоморфном представлении континуального интеграла, а по вспомогательным переменным интеграл фейнмановский, по траекториям в конфигурационном пространстве.

- Взаимодействие
$$\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{dx}\, e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$
поля фермионные
$$\psi = \sum_{\mathrm{p},s} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon_\mathrm{p} V}} \big((a_{\mathrm{p},s})^k \mathrm{u}_{\mathrm{p},s} \mathrm{e}^{\mathrm{ipx}} + (\bar{b}_{\mathrm{p},s})^{k+1} \mathrm{v}_{\mathrm{p},s} \mathrm{e}^{-\mathrm{ipx}}\big),$$
поля электромагнитные: скалярный потенциал
$$A^0 = \sum_{\mathrm{k}\in K_+} \frac{1}{\sqrt{2V}} \big((Q^0_\mathrm{k} + \mathrm{i}q^0_\mathrm{k})^k \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} + (Q^0_\mathrm{k} - \mathrm{i}q^0_\mathrm{k})^k \mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\big),$$
векторный потенциал ($i = 1, 2, 3$)
$$A^i = \sum_{\mathrm{k}\in K_+} \frac{1}{\sqrt{2V}} \big[(Q^l_\mathrm{k} + \mathrm{i}q^l_\mathrm{k})^{k-1} \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} + (Q^l_\mathrm{k} - \mathrm{i}q^l_\mathrm{k})^{k-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\big] +$$
$$+ \sum_{\mathrm{k},\lambda} \frac{e^i_{\mathrm{k}\lambda}}{\sqrt{2V\omega_\mathrm{k}}} \big[(c_{\mathrm{k},\lambda})^k \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} + (\bar{c}_{\mathrm{k},\lambda})^{k+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\big].$$

IX. S - матрица. Скалярное поле

Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля со взаимодействием
$$S = \int \mathrm{d}^{d+1}x \left[\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right], \quad x = (\tau, x^i),\ i = 1, \dots, d.$$
Выделим свободную теорию для канонического квантования
$$S = S_0 + S_{int},$$
$$S_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{d+1}x \left[\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - m^2\phi^2\right], \quad S_{int} = \int \mathrm{d}^{d+1}x \left[\frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right],$$
где учтена возможность перенормировки массы свободной теории из-за взаимодействия $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$.

Гамильтониан соответствующей квантовой теории поля имеет следующий вид
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \qquad \hat{H}_0 = \sum_p \varepsilon_p \hat{a}^+_p \hat{a}_p,$$

а взаимодействие, приведенное к нормальной форме, можно записать следующим образом

$$\hat{V} = V_0 + \Big(\frac{3\lambda}{4V}\sum_q \frac{1}{\varepsilon_q} - \frac{1}{2}\delta m^2\Big) V \sum_p \frac{1}{2V\varepsilon_p}(\hat{a}_p^+\hat{a}_{-p}^+ + \hat{a}_p\hat{a}_{-p} + 2\hat{a}_p^+\hat{a}_p) +$$
$$\frac{\lambda}{4}\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4}\frac{V\delta_{p_1+p_2+p_3+p_4,0}}{\sqrt{2V\varepsilon_{p_1}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_2}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_3}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_4}}}(\hat{a}_{p_1}\hat{a}_{p_2}\hat{a}_{p_3}\hat{a}_{p_4} + \hat{a}_{p_1}^+\hat{a}_{p_2}^+\hat{a}_{p_3}^+\hat{a}_{p_4}^+) +$$
$$\frac{\lambda}{4}\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4}\frac{4V\delta_{p_1,p_2+p_3+p_4}}{\sqrt{2V\varepsilon_{p_1}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_2}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_3}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_4}}}(\hat{a}_{p_1}^+\hat{a}_{p_2}\hat{a}_{p_3}\hat{a}_{p_4} + \hat{a}_{p_2}^+\hat{a}_{p_3}^+\hat{a}_{p_4}^+\hat{a}_{p_1}) +$$
$$\frac{\lambda}{4}\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4}\frac{6V\delta_{p_1+p_2,p_3+p_4}}{\sqrt{2V\varepsilon_{p_1}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_2}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_3}}\sqrt{2V\varepsilon_{p_4}}}\hat{a}_{p_1}^+\hat{a}_{p_2}^+\hat{a}_{p_3}\hat{a}_{p_4},$$

где операторы $\hat{a}_p^+, \hat{a}_p$ подчиняются каноническим коммутационным соотношениям, $\varepsilon_p = \sqrt{m^2+p^2}$, V_0 - некоторая, пока не зафиксированная, константа.

Предмет вычисления - S-матрица. Определение оператора:

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_f\to+\infty\\ t_i\to-\infty}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\hat{H}_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t_f-t_i)\hat{H}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_i\hat{H}_0}.$$

Символ нормально упорядоченной S-матрицы

$$S(\bar{\alpha},\alpha) \equiv \langle\alpha|\hat{S}|\alpha\rangle = \lim_{\substack{t_f\to+\infty\\ t_i\to-\infty}}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}_f\mathrm{d}\alpha_f\mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i\langle\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\hat{H}_0}|\alpha_f\rangle\,\langle\alpha_f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t_f-t_i)\hat{H}}|\alpha_i\rangle\,\langle\alpha_i|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_i\hat{H}_0}|\alpha\rangle.$$

Используя связь матричного элемента по когерентным состояниям с ядром оператора эволюции

$$\langle\alpha_f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|\alpha_i\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_f\alpha_f}U(\bar{\alpha}_f,\alpha_i|t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i},$$

символ S-матрицы можно переписать в виде

$$S(\bar{\alpha},\alpha) = \lim_{\substack{t_f\to+\infty\\ t_i\to-\infty}}\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}\alpha}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}_f\mathrm{d}\alpha_f\mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_f\alpha_f}U_0(\bar{\alpha},\alpha_f|-t_f)U(\bar{\alpha}_f,\alpha_i|t_f-t_i)U_0(\bar{\alpha}_i,\alpha|t)\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i}.$$

Ядро оператора эволюции определяется континуальным интегралом

$$U(\bar{\alpha}_f,\alpha_i|t) = \int_{\substack{\bar{\alpha}(t_f)=\bar{\alpha}_f\\ \alpha(t_i)=\alpha_i}}\mathcal{D}\bar{\alpha}(\tau)\mathcal{D}\alpha(\tau)\exp\Big[\bar{\alpha}(t_i)\alpha(t_i) + \int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}\tau\,\big(\dot{\bar{\alpha}}(\tau)\alpha(\tau) - \mathrm{i}H(\bar{\alpha}(\tau)\alpha(\tau))\big)\Big].$$

Можно показать, что

$$U_0(\bar{\alpha}_f,\alpha_i|t) = \exp\Big[\sum_p \bar{\alpha}_{p,f}\alpha_{p,i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\varepsilon_p}\Big],$$

кроме того

$$\int \mathrm{d}\bar{\alpha}_i \mathrm{d}\alpha_i \, f(\alpha_i) \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i \alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\varepsilon}} = f(\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\varepsilon}), \qquad \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_f \mathrm{d}\alpha_f \, g(\bar{\alpha}_f) \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_f\alpha_f + \bar{\alpha}\alpha_f \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varepsilon}} = g(\bar{\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varepsilon}).$$

Отсюда находим

$$S(\bar{\alpha}_p, \alpha_p) = \lim_{\substack{t_f \to +\infty \\ t_i \to -\infty}} \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_p\alpha_p} U(\bar{\alpha}_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\varepsilon_p}, \alpha_p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_i\varepsilon_p} | t_f - t_i).$$

Символ S-матрицы в рассматриваемой теории принимает вид

$$S(\bar{\alpha}_p, \alpha_p) = \lim_{\substack{t_f \to +\infty \\ t_i \to -\infty}} \prod_p \int_{\substack{\bar{\alpha}_p(t_f) = \bar{\alpha}_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\varepsilon_p} \\ \alpha_p(t_i) = \alpha_p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_i\varepsilon_p}}} \mathcal{D}\bar{\alpha}_p(\tau) \mathcal{D}\alpha_p(\tau) \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_p\alpha_p}$$

$$\exp\Big[\bar{\alpha}_p(t_i)\alpha_p(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \left(\dot{\bar{\alpha}}_p(\tau)\alpha_p(\tau) - \mathrm{i}\varepsilon_p \bar{\alpha}_p(\tau)\alpha_p(\tau)\right)\Big] \exp\Big[-\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, V[\phi(\tau, x)]\Big],$$

в этой формуле

$$V[\phi(\tau, x)] = \frac{\lambda}{4}\big[\phi^4(\tau, x) + C_2\phi^2(\tau, x) + C_0\big],$$

$$\phi(\tau, x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_p}}\big(\alpha_p(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + \bar{\alpha}_p(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\big),$$

$$C_2 = -\frac{2\delta m^2}{\lambda} - 6\mathrm{i}D_c(0), \quad C_0 = \frac{4V_0}{\lambda V}.$$

<u>Теория возмущений:</u>

$$\exp\Big[-\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, V[\phi(\tau, x)]\Big] = 1 - \mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, V[\phi(\tau, x)] + \dots =$$

$$\Big[1 - \mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, V\Big[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j(\tau, x)}\Big] + \dots\Big] \exp\Big[\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, \phi(\tau, x) j(\tau, x)\Big]\Big|_{j=0} \equiv$$

$$\exp\Big[-\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, V\Big[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j(\tau, x)}\Big]\Big] \exp\Big[\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, \phi(\tau, x) j(\tau, x)\Big]\Big|_{j=0}.$$

Таким образом, в рамках теории возмущений

$$S(\bar{\alpha}_p, \alpha_p) = \exp\Big[-\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d x \, V\Big[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j(\tau, x)}\Big] S_0(\bar{\alpha}_p, \alpha_p | j)\Big|_{j=0},$$

причем

$$S_0(\bar{\alpha}_p, \alpha_p | j) = \lim_{\substack{t_f \to +\infty \\ t_i \to -\infty}} \prod_p \int_{\substack{\bar{\alpha}_p(t_f) = \bar{\alpha}_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\varepsilon_p} \\ \alpha_p(t_i) = \alpha_p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_i\varepsilon_p}}} \mathcal{D}\bar{\alpha}_p(\tau) \mathcal{D}\alpha_p(\tau) \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_p\alpha_p}$$

$$\exp\Big[\bar{\alpha}_p(t_i)\alpha_p(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \left(\dot{\bar{\alpha}}_p(\tau)\alpha_p(\tau) - \mathrm{i}\varepsilon_p \bar{\alpha}_p(\tau)\alpha_p(\tau) + \mathrm{i}\bar{\alpha}_p(\tau)\eta_p(\tau) + \mathrm{i}\bar{\eta}_p(\tau)\alpha_p(\tau)\right)\Big],$$

$$\eta_p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_p}} \int \mathrm{d}^d x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} j(\tau, x).$$

Интеграл квадратичный, вычисляется стандартным образом

i. перевальная траектория

$$\dot{\bar{\alpha}}_p(\tau) - \mathrm{i}\varepsilon_p\bar{\alpha}_p(\tau) + \mathrm{i}\bar{\eta}_p(\tau) = 0, \quad \bar{\alpha}_p(t_f) = \bar{\alpha}_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\varepsilon_p},$$

ii. решение

$$\bar{\alpha}_p(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\varepsilon_p}\big(\bar{\alpha}_p + \int_\tau^{t_f} \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{i}\bar{\eta}_p(\tau_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_1\varepsilon_p}\big),$$

iii. показатель экспоненты

$$\bar{\alpha}_p(t_i)\alpha_p(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau\, \mathrm{i}\bar{\alpha}_p(\tau)\eta_p(\tau) = \bar{\alpha}_p\alpha_p +$$

$$\mathrm{i}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau\, \big(\bar{\alpha}_p(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\varepsilon_p}\eta_p(\tau) + \bar{\eta}_p(\tau)\alpha_p(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\varepsilon_p}\big) - \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau_2}^{t_f} \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau_2-\tau_1)\varepsilon_p}\bar{\eta}_p(\tau_1)\eta_p(\tau_2),$$

iv. континуальный интеграл

$$\int_{\substack{\bar{\alpha}_p(t_f)=0\\ \alpha_p(t_i)=0}} \mathcal{D}\bar{\alpha}_p(\tau)\mathcal{D}\alpha_p(\tau) \exp\Big[\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau\, \big(\dot{\bar{\alpha}}_p(\tau)\alpha_p(\tau) - \mathrm{i}\varepsilon_p\bar{\alpha}_p(\tau)\alpha_p(\tau)\big)\Big] = 1,$$

v.

$$S_0(\bar{\alpha}_p, \alpha_p|j) = \exp\Big[\mathrm{i}\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d x\, \phi_0(\tau, x) j(\tau, x) +$$

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}\tau_2 \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}^d x_2 \mathrm{d}^d x_1\, \frac{1}{2} j(\tau_2, x_2) D_c(\tau_2 - \tau_1, x_2 - x_1) j(\tau_1, x_1)\Big],$$

где введены новая переменная

$$\phi_0(\tau, x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_p}}\big(\alpha_p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\varepsilon_p + \mathrm{i}px} + \bar{\alpha}_p \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\tau\varepsilon_p - \mathrm{i}px}\big),$$

и причинная функция Грина

$$D_c(\tau, x) = \mathrm{i}\sum_p \frac{1}{2V\varepsilon_p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\tau|\varepsilon_p + \mathrm{i}px}.$$

Ответ для S-матрицы в теории возмущений

$$S[\phi_0(\mathrm{x})] = \exp\Big[-\mathrm{i}\frac{\lambda}{4}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\, \Big[\frac{\delta^4}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x}))^4} + C_2\frac{\delta^2}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x}))^2} + C_0\Big]\Big]$$

$$\exp\Big[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\, \phi_0(\mathrm{x}_1) j(\mathrm{x}_1) + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_2 \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\, \frac{1}{2} j(\mathrm{x}_2) D_c(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1) j(\mathrm{x}_1)\Big]\Big|_{j=0}.$$

0. *Нулевой порядок теории возмущений*

$$S_0[\phi_0(\mathrm{x})] = 1.$$

1. *Первый порядок теории возмущений*

Простые нужные формулы (обозначение $S_0(j) \equiv S_0(\bar{\alpha}_p, \alpha_p|j)$):

$$\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x})} S_0(j) = \Phi(\mathrm{x}) S_0(j), \quad \Phi(\mathrm{x}) = \phi_0(\mathrm{x}) + \int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\, D_c(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1) j(\mathrm{x}_1),$$

$$\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y})} \Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{i}} D_c(\mathrm{x} - \mathrm{y}).$$

Вариационные производные

$$\frac{\delta^2}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x}))^2} S_0(j) = \frac{1}{\mathrm{i}} D_c(0) S_0(j) + \Phi^2(\mathrm{x}) S_0(j),$$

$$\frac{\delta^3}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x}))^3} S_0(j) = 3\frac{1}{\mathrm{i}} D_c(0) \Phi(\mathrm{x}) S_0(j) + \Phi^3(\mathrm{x}) S_0(j),$$

$$\frac{\delta^4}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x}))^4} S_0(j) = 3\Big(\frac{1}{\mathrm{i}} D_c(0)\Big)^2 S_0(j) + 6\frac{1}{\mathrm{i}} D_c(0) \Phi^2(\mathrm{x}) S_0(j) + \Phi^4(\mathrm{x}) S_0(j).$$

Отсюда находим

$$S_1[\phi_0(\mathrm{x})] = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{4} \int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x} \left[\phi_0^4(\mathrm{x}) + \phi_0^2(\mathrm{x})\big(C_2 - 6\mathrm{i}D_c(0)\big) + \big(C_0 - \mathrm{i}D_c(0)C_2 - 3D_c^2(0)\big)\right].$$

Время выбирать константы

$$C_2 = 6\mathrm{i}D_c(0), \quad C_0 = -3D_c^2(0).$$

Постоянные C_2, C_0 выбраны так, чтобы первый порядок теории возмущений описывал элементарный процесс рассеяния частиц друг на друге.

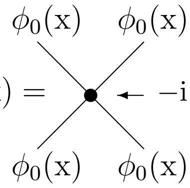
Значением C_2 определяется величина *перенормировки массы*

$$\delta m^2 = -6\mathrm{i}\lambda D_c(0) = \frac{3\lambda}{V} \sum_p \frac{1}{\varepsilon_p} = 3\lambda \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}}.$$

Выписанный интеграл расходится на верхнем пределе при $d \geqslant 1$. Следовательно, для того чтобы масса m была конечной и действительной, квадрат "затравочной массы"m_0^2 должен быть отрицательным и бесконечно большим.

В этом случае первый порядок теории возмущений принимает вид, который можно представить графически (диаграмма Файнмана)

$$S_1[\phi_0(\mathrm{x})] = -\mathrm{i}\tfrac{\lambda}{4} \int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\, \phi_0^4(\mathrm{x}) =$$



$\leftarrow -\mathrm{i}\tfrac{\lambda}{4} \int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}$

Правила диаграммной техники:

– внешним концам сопоставляется поле ϕ_0,

– в каждую вершину входят четыре линии,

– вершине сопоставляется 4-координата x и интегрирование по этой координате с весом $-\mathrm{i}\dfrac{\lambda}{4}\displaystyle\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}$.

2. *Второй порядок теории возмущений*

Вариационные производные

$$\frac{\delta^4}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^4}\Phi^4(\mathrm{x})S_0(j) = S_0(j)\frac{\delta^4\Phi^4(\mathrm{x})}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^4} + 4\frac{\delta S_0(j)}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))}\frac{\delta^3\Phi^4(\mathrm{x})}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^3} +$$
$$6\frac{\delta^2 S_0(j)}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^2}\frac{\delta^2\Phi^4(\mathrm{x})}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^2} + 4\frac{\delta^3 S_0(j)}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^3}\frac{\delta\Phi^4(\mathrm{x})}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))} + \Phi^4(x)\frac{\delta^4 S_0(j)}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^4} =$$
$$S_0(j)24D_c^4(\mathrm{x}-\mathrm{y}) +$$
$$4S_0(j)\Phi(\mathrm{x})24D_c^3(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Phi(\mathrm{y}) +$$
$$6S_0(j)\Phi^2(\mathrm{x})12D_c^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}D_c(0) + \Phi^2(\mathrm{y})\Big) +$$
$$4S_0(j)\Phi^3(\mathrm{x})4D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Big(3\frac{1}{\mathrm{i}}D_c(0)\Phi(\mathrm{y}) + \Phi^3(\mathrm{y})\Big) +$$
$$S_0(j)\Phi^4(\mathrm{x})\Big(3\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}D_c(0)\Big)^2 + 6\frac{1}{\mathrm{i}}D_c(0)\Phi^2(\mathrm{y}) + \Phi^4(\mathrm{y})\Big).$$

$$\frac{\delta^2}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^2}\Phi^4(\mathrm{x})S_0(j) = S_0(j)\frac{\delta^2\Phi^4(\mathrm{x})}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^2} + 2\frac{\delta S_0(j)}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))}\frac{\delta\Phi^4(\mathrm{x})}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))} + \Phi^4(x)\frac{\delta^2 S_0(j)}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^2} =$$
$$S_0(j)\Phi^2(\mathrm{x})12D_c^2(\mathrm{x}-\mathrm{y}) +$$
$$2S_0(j)\Phi^3(\mathrm{x})4D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Phi(\mathrm{y}) +$$
$$S_0(j)\Phi^4(\mathrm{x})\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}D_c(0) + \Phi^2(\mathrm{y})\Big).$$

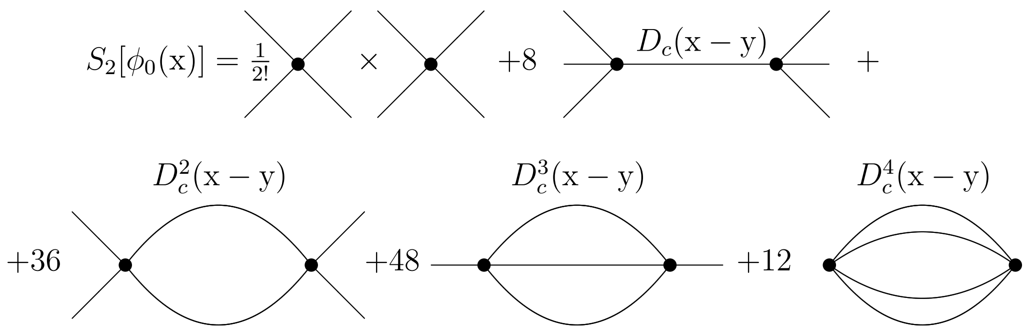
Используя эти выражения, находим, что

$$\Big[\frac{\delta^4}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^4} + 6\mathrm{i}D_c(0)\frac{\delta^2}{(\mathrm{i}\delta j(\mathrm{y}))^2} - 3D_c^2(0)\Big]\Phi_(\mathrm{x})S_0(j)\Big|_{j=0} =$$
$$\phi_0^4(\mathrm{x})\phi_0^4(\mathrm{y}) + \phi_0^3(\mathrm{x})16D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})\phi_0^3(\mathrm{y}) + \phi_0^2(\mathrm{x})72D_c^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})\phi_0^2(\mathrm{y}) +$$
$$\phi_0(\mathrm{x})96D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})\phi_0(\mathrm{y}) + 24D_c^4(\mathrm{x}-\mathrm{y}).$$

Аналитическое выражение для нормального символа S-матрицы во втором порядке теории возмущений

$$S_2[\phi(\mathrm{x})] = \frac{1}{2}\Big[-\mathrm{i}\frac{\lambda}{4}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\,\phi_0^4(\mathrm{x})\Big]^2 +$$
$$\frac{1}{2}\Big(-\mathrm{i}\frac{\lambda}{4}\Big)^2\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{y}\,\big[\phi_0^3(\mathrm{x})16D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})\phi_0^3(\mathrm{y})\big]+$$
$$\frac{1}{2}\Big(-\mathrm{i}\frac{\lambda}{4}\Big)^2\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{y}\,\big[\phi_0^2(\mathrm{x})72D_c^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})\phi_0^2(\mathrm{y})\big]+$$
$$\frac{1}{2}\Big(-\mathrm{i}\frac{\lambda}{4}\Big)^2\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{y}\,\big[\phi_0(\mathrm{x})96D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})\phi_0(\mathrm{y})\big]+$$
$$\frac{1}{2}\Big(-\mathrm{i}\frac{\lambda}{4}\Big)^2\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{y}\,24D_c^4(\mathrm{x}-\mathrm{y}).$$

Графическое представление второго порядка теории возмущений



Правила диаграммной техники (продолжение):

– внутренним линиям сопоставляется причинная функция Грина $D_c(\mathrm{x}-\mathrm{y})$ с разностью 4-координат вершин, которые соединяются этой внутренней линией,

– коэффициент при диаграмме определяется непосредственным вычислением.

Производящий функционал функций Грина

Определим обратную причинную функцию Грина

$$\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\,D_c^{-1}(\mathrm{x}_1-\mathrm{x})D_c(\mathrm{x}-\mathrm{x}_2) = \delta(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2).$$

Можно показать, что

$$D_c^{-1}(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = (\partial_\mathrm{x}^2+m^2)\delta(\mathrm{x}-\mathrm{y}), \quad \partial_\mathrm{x}^2 = \partial_\tau^2 - \partial_x^2,$$

это означает (проверяется вычислением), что

$$(\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2)D_c(\tau, x) = \delta(\tau)\delta(x).$$

Теперь $S_0(j)$ можно переписать в виде

$$S_0(j) = \exp\Big[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_2\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\, J(\mathrm{x}_2)\frac{1}{2}D_c(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)J(\mathrm{x}_1)\Big],$$

$$J(\mathrm{x}) = j(\mathrm{x}) + \int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{y}\,\phi_0(y)(\partial_\mathrm{y}^2 + m^2)\delta(\mathrm{y} - \mathrm{x}),$$

здесь учтено, что $(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\phi_0(\mathrm{x}) = 0$.

Определим производящий функционал функций Грина

$$Z[J\,] = \exp\Big[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\, V\Big[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J(\mathrm{x})}\Big]\Big]\exp\Big[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_2\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\, J(\mathrm{x}_2)\frac{1}{2}D_c(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)J(\mathrm{x}_1)\Big].$$

Представим функционал $Z[J\,]$ в виде разложения

$$Z[J\,] = \sum_{n=0}\frac{1}{n!}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_n\, J(\mathrm{x}_1)\ldots J(\mathrm{x}_n)G(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n),$$

в этом выражении $G(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)$ - так называемые функции Грина.

S-матрица через функции Грина выражается следующим образом (так как условие $j(\mathrm{x}) = 0$ переходит в условие $J(\mathrm{x}) = \int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{y}\,\phi_0(y)(\partial_\mathrm{y}^2 + m^2)\delta(\mathrm{y} - \mathrm{x})$)

$$S[\phi_0(\mathrm{x})] = \sum_{n=0}\frac{1}{n!}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_n\,\phi_0(\mathrm{x}_1)\ldots\phi_0(\mathrm{x}_n)(\partial_{\mathrm{x}_1}^2 + m^2)\ldots(\partial_{\mathrm{x}_n}^2 + m^2)G(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n).$$