Нелинейные системы, осень 2014

Задачи

1. Найти спектр гамильтониана XYZ-модели Гейзенберга для $N = 2$:

$$H = J_x \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + J_y \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + J_z \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}.$$

   Отдельно рассмотреть случаи XXX-модели ($J_x = J_y = J_z$), XXZ-модели ($J_x = J_y \neq J_z$) и сравнить с решением, полученным методом Бете.

2. Найти спектр гамильтониана XXX-модели на 3 узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(4)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}.$$

   Определить также кратность вырождения уровней.

3. Рассмотрим XXX-модель на N узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}.$$

   Обозначим через $\vec{S}$ оператор полного спина: $\vec{S} = \sum_j \vec{\sigma}^{(j)}$. Пусть $|\Psi_m\rangle$ – бетевские состояния с m магнонами (т.е. $S_z |\Psi_m\rangle = (N-m) |\Psi_m\rangle$). Доказать, что $S_+ |\Psi_m\rangle = 0$ при $m = 1, 2$, где $|\Psi_m\rangle$ – бетевские состояния с m магнонами (такие, что бетевские корни $\lambda_i < \infty$).

4. Рассмотрим XXX-модель на N узлах с периодическими граничными условиями:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right), \qquad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}.$$

   Найти какой-нибудь оператор, коммутирующий с H^{xxx}, но не являющийся функцией от него и отличный от циклического сдвига и полного спина. (*Указание:* ответ проще всего выражается в терминах операторов P_{ij} перестановки пространств, ассоциированных с узлами i, j.)

5. Рассмотрим ферромагнитную XXX-модель на цепочке бесконечной длины:

$$H^{\text{xxx}} = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\vec{\sigma}^{(k)} \vec{\sigma}^{(k+1)} - 1 \right).$$

   Доказать, что энергия связанного состояния двух магнонов $E(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2})$ всегда меньше, чем энергия двух магнонов с импульсами p_1 и p_2 такими, что $p_1 + p_2 = p(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}) = p(u/2)$.

6. Найти комплексные ("струнные") решения уравнений Бете для XXZ-модели при $N \to \infty$ в секторе с двумя перевернутыми спинами и выразить импульс и энергию соответствующих состояний через вещественную часть корней Бете.

7. Найти функцию Янга для XXX и XXZ-моделей.

8. Найти собственные состояния и спектр энергий одной и двух бозе-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H}_N = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1 \le j < k \le N} \delta(x_j - x_k) \qquad (N = 1, 2)$$

на отрезке $[0, L]$ с непроницаемыми стенками (последнее означает, что волновая функция обращается в 0, если хотя бы одна из частиц находится на краю отрезка).

9. Для системы трех тождественных бозе-частиц с гамильтонианом

$$\hat{H}_3 = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1 \le j < k \le 3} \delta(x_j - x_k)$$

   а) построить общие собственные состояния гамильтониана и оператора полного импульса $\hat{P} = -i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}$,

   б) наложить периодические граничные условия на отрезке $[0, L]$ и получить систему уравнений Бете.

10. Рассмотрим прологарифмированные уравнения Бете для модели бозе-газа из N частиц на отрезке $[0, L]$ с периодическими граничными условиями:

$$L\lambda_j + 2 \sum_{k=1}^{N} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{c} = 2\pi n_j$$

Доказать, что в состоянии, которое характеризуется целыми или полуцелыми числами n_j, полный импульс системы частиц равен $P = \frac{2\pi}{L} \sum_{j=1}^{N} n_j$.

11. Рассмотрим систему N "магнитных моментов" σ_i, каждый из которых может принимать два значения: $\sigma_i = \pm 1$. Энергия конфигурации $\{\sigma_i\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ равна

$$E(\{\sigma_i\}) = J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} + H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad \sigma_{N+1} \equiv \sigma_1.$$

Эта модель называется одномерной моделью Изинга. В предположении, что система находится в контакте с термостатом при температуре T, найти:

   а) статистическую сумму и среднюю энергию, б) среднее значение намагниченности $M = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$,

в) корреляционную функцию $\langle \sigma_n \sigma_m \rangle$ в пределе $N \to \infty$.

12. Доказать, что вектор $|+++\ldots+\rangle$ собственный для трансфер-матрицы 6-вершинной модели и найти соответствующее собственное значение.

13. Рассмотрим 6-вершинную модель на квадратной $N \times N$ решетке с R-матрицей

$$\mathsf{R} = \mathsf{R}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

где $a = \sinh(u+\eta)$, $b = \sinh u$, $c = \sinh \eta$ и квантовой матрицей монодромии

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{R}_{10}(u)\mathsf{R}_{20}(u)\ldots\mathsf{R}_{N0}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Найти скалярное произведение $\langle \Omega | \, C(v) B(u) \, | \Omega \rangle$. Здесь $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$ – порождающий вектор.

14. Пусть $\mathsf{R}_{0j}(u) = \mathbf{1}u + \mathsf{P}_{0j}$ – квантовая R-матрица XXX-модели (P_{0j} – оператор перестановки). Рассмотрим трансфер-матрицу XXX-модели

$$\mathsf{T}(u) = \mathrm{tr}_0 \Big(\mathsf{R}_{01}(u)\mathsf{R}_{02}(u)\ldots\mathsf{R}_{0N}(u) \Big).$$

Найти $\mathsf{T}(0)$, $\partial_u \log \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}$, $\partial_u^2 \log \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}$.