Листок 05. Срок сдачи 29 ноября 2015

Для сдачи каждой из задач 5.1 — 5.5 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

05.01. Параметрическое задание кривой.

а) Функция $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ определена в окрестности точки $\alpha \in (t_1, t_2)$. Дайте определение дифференцируемости f в точке α и дифференциала функции f в этой точке. Докажите, что дифференциал вектор-функции $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ задается формулой $df = (\varphi'(\alpha), \psi'(\alpha)) \cdot dt$.

б) Пусть вектор-функция $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ определена на отрезке $[t_1, t_2]$ и дифференцируема на нем, причём $\varphi'(t) > 0$ при всех t, $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$. Докажите, что существует такая дифференцируемая функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, что система уравнений

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad\qquad t \in [t_1, t_2]$$

равносильна уравнению $y = g(x)$, $x \in [a, b]$. Докажите, что функция g дифференцируема на $[a, b]$, причём $g'(x) = g'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

в) С помощью вектор-функции $f(t)$ можно задавать плоское движение материальной точки. Покажите, что мгновеная скорость этого движения есть $\frac{df}{dt}$.

г) Докажите, что если в условиях предыдущего пункта функции φ и ψ дважды дифференцируемы, то функция $g(x)$ также дважды дифференцируема, причём для $x = \varphi(t)$

$$g''(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

05.02 Дифференциал функции двух переменных Пусть $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ и пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ определена в окрестности точки $(a, b) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

а) Дайте определение дифференцируемости f в точке (a, b) и дифференциала функции f в этой точке. Докажите, что дифференциал функции двух переменных $f(x, y)$ задаётся формулой $df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy$. (Дайте определение частных производных!)

б) Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$. (Оценка погрешности вычисления в этой задаче не требуется.)

в) Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны на D. Докажите, что функция f дифференцируема в точке (a, b).

05.03. Неявно заданная функция. а) Пусть $f(a, b) = 0$ и f непрерывна в D. Предположим, что в D содержится такой прямоугольник $P = [p, q] \times [r, s] = \{(x, y) \quad p \leq x \leq q;\ r \leq y \leq s\}$, что $a \in (p, q)$, $b \in (r, s)$ и при любом фиксированном $x_0 \in [p, q]$ функция $f(x_0, y)$ является строго монотонной функцией от y на отрезке $[s, t]$. Докажите, что существует такой содержащий точку a интервал $(u, v) \subset (p, q)$ и функция $g : (u, v) \to \mathbb{R}$, что при $u < x < v$, $r < y < s$ уравнения $f(x, y) = 0$ и $y = g(x)$ равносильны.

б) Докажите, что функция g из предыдущего пункта непрерывна в точке a.

г) Пусть $f(a, b) = 0$. Предположим, что функция f имеет непрерывные частные производные в D, и $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Докажите, что существует такой содержащий точку (a, b) прямоугольник

$$Q = (u, v) \times (r, s) = \{(x, y) \quad u < x < v;\ r < y < s\}, \qquad Q \subset D,$$

и функция $g : (u, v) \to \mathbb{R}$, что при $u < x < v$, $r < y < s$ уравнения $f(x, y) = 0$ и $y = g(x)$ равносильны. Докажите, что при этом функция g дифференцируема в точке a и

$$g'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$

05.04. Метод Лопиталя. а) Приведите пример, когда метод Лопиталя "не работает": при $x \to a$ есть предел $f'(x)/g'(x)$, но предел $f(x)/g(x)$ не равен пределу отношения производных; укажите, какие условия теоремы о правиле Лопиталя при этом нарушены.

б) Приведите пример, когда $f(0) = g(0) = 0$, функции f, g дифференцируемые в окрестности нуля, при $x \to 0$ есть предел $f(x)/g(x)$ и нет предела $f'(0)/g'(0)$.

в) Придумайте и докажите правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $0 \times \infty$.

г) Придумайте и докажите правило Лопиталя для раскрытия неопределенности 1^∞.

05.05. Касательные. Касательная к кривой в точке (a, b) может быть определена как прямая, проходящая через точку (a, b), так что расстояние от точки касательной, находящейся на расстоянии r от (a, b) до кривой есть $o(r)$.

а) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (a, b). Как выглядит уравнение касательной для кривой, заданной параметрически? Для кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$?

б) Пусть $f(x, y)$ - дифференцируемая функция двух переменных и $f(a, b) = c$. Покажите, что касательная плоскость к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (a, b, c) может быть описана уравнением $z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$.

05.06.* Полярные координаты. Кривую, заданную уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, можно рассматривать также как параметрическую кривую $x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\cos\varphi$ в декартовых координатах. Найдите угол между этой кривой и окружностью с центром в начале координат, проходящей через точку кривой.

05.07.* Пусть $g(t)$ - ограничение функции $f(x, y)$ на прямую $x = a + \xi t, y = b + \eta t$. Выразите $g'(0)$ через частные производные функции f.

05.08.* Пусть $y = y(x)$ - дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, причем $y(a) = b$; Пусть $z = z(y)$ - дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, причем $z(b) = c$. Пусть $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ - композиция этих отображений. Покажите, что ее дифференциал в точке a есть произведение линейных отображений $dw = dz \circ dy$. Напишите, исходя из этого, явную формулу для вычисления частных производных композиции через частные производные отображений $y = y(x)$ и $z = z(y)$.

05.09.* Каков порядок касания осей координат и ветвей параметрически заданной кривой $x = t/(1 + t^6),\ y = t^3/(1 + t^4)$ в начале координат?