Аффинные алгебры Ли и приложения

Домашняя работа 3

1. Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ — базисы $\mathfrak{n}^+$ и $\mathfrak{n}^-$, дуальные относительно инвариантной билинейной формы на $L(A)$. Покажите, что элемент универсальной обёртывающей алгебры $\sum x_i y_i$ не зависит от выбора этих базисов.

2. Пусть $\mathfrak{g}_0$ – конечномерная алгебра Ли с коммутатором $[\ ,\ ]_0$ и невырожденной инвариантной симметрической билинейной формой $(\ ,\ )$. Пусть $\bar{d}$ – дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ такое, что $(\bar{d}(x), y) = -(x, \bar{d}(y))$ для $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, где c и d — некоторые элементы. Определим скобку $[\ ,\ ]$ на $\mathfrak{g}$ с помощью соотношений

$$[x, y] = [x, y]_0 + (\bar{d}(x), y)c, \quad x, y \in \mathfrak{g}_0,$$
$$[c, x] = 0,\ x \in \mathfrak{g}, \quad [d, x] = \bar{d}(x).$$

Проверьте, что эта скобка задаёт структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g}$.

3. Рассмотрим обобщённую симметрическую матрицу Картана типа $A_n^{(1)}$ (т.е. матрицу $(A_{i,j})_{i,j=0}^n$ с ненулевыми компонентами $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1$, $A_{0,n} = A_{n,0} = -1$). Докажите, что соответствующая группа Вейля изоморфна полупрямому произведению $S_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}^n$.

4. Неразложимая обобщенная матрица Картана A является матрицей строго гиперболического типа (соответственно гиперболического типа), если A — матрица неопределенного типа и любая связная собственная поддиаграмма диаграммы Дынкина для матрицы A имеет конечный (соответственно конечный или аффинный) тип. Покажите, что $A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$ (a и b – положительные целые числа) матрица конечного (соответственно аффинного или строго гиперболического) типа, если и только если $ab < 3$ (соответственно, $ab = 4$ или $ab > 4$). Покажите, что существует только конечное число гиперболических матриц порядка больше 3 и что порядок строго гиперболических (соответственно, гиперболических) матриц не превосходит 5 (соответственно, 10).

5. Пусть A – матрица конечного или аффинного типа. Докажите, что для произовльного корня β и произвольного вещественного корня α струна $\{\beta + k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$ содержит самое большее пять корней. Покажите, что если A неопределенного типа, то число корней в струне может быть сколь угодно большим.

6. Найдите все вещественные положительные корни для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$