Математический анализ: конспект лекций

В.И. Богачев

мат. фак. ВШЭ, 2 курс, осень 2015

Оглавление

Глава 7

Поверхностные интегралы и интегрирование форм

В этой главе обсуждаются поверхностные меры, а также связанное с ними интегрирование дифференциальных форм. Различные способы введения поверхностных интегралов и интегралов от дифференциальных форм изложены в книгах Дороговцев [**6**], Ефимов [**7**], Зорич [**8**], Картан [**9**], Кудрявцев [**10**], Львовский [**12**], Никольский [**15**], [**16**], Постников [**17**], Решетняк [**18**], Рудин [**19**], Фихтенгольц [**21**], Шилов [**22**]. Принципиальным новшеством по сравнению с объемным интегралом из предыдущей главы является появление двух разных видов интегрирования по поверхностям и кривым: интегрирование по поверхностной мере и интегрирование форм, что в старых курсах примерно соответствует интегралам первого и второго рода. В техническом отношении интегралы от форм (интегралы второго рода) сводятся к интегралам по поверхностным мерам, но в идейном отношении это новый важный объект, обладающий важными физическими интерпретациями и применениями. В свою очередь, конструкция поверхностной меры может быть введена через параметризацию поверхностей и тем самым через обычный интеграл по пространству меньшей размерности (что обычно и делается в учебных курсах и будет сделано ниже), но имеется и более инвариантный (и значительно более общий) способ, связанный с мерами Хаусдорфа. Однако этот способ (изложенный, например, в Эванс, Гариепи [**23**]) требует значительно более тонких построений и не может быть рекомендован для первоначального знакомства с обсуждаемыми концепциями. Поэтому ниже об этом способе сделаны только некоторые поясняющие замечания без доказательств. Не обсуждается здесь и подход к интегрированию дифференциальных форм по так называемым сингулярным кубам (о нем можно прочитать в [**7**], [**12**], [**17**]). Упражнения по этому разделу можно найти в Гюнтер, Кузьмин [**3**], Демидович [**4**], Дороговцев [**5**], Кудрявцев и др. [**11**], Ляшко и др. [**13**]. Весьма полезно чтение соответствующего раздела трактата Фихтенгольца [**21**] (гл. 15, § 1 – 3, гл. 16, § 3, гл. 17, гл. 18, § 2,4).

§ 7.1. Вводные замечания

Во многих задачах анализа и геометрии и в еще большем числе задач из различных приложений возникает необходимость определять меры и интегрировать функции на поверхностях в многомерных пространствах. Например, познакомившись с интегралом на прямой, легко догадаться, что разумно понимать под интегралом от функции по отрезку в плоскости. Из этого сразу ясно, что такое интеграл по ломаной. Но вот уже для интеграла по окружности такой очевидности нет. Здесь возникают две конкурирующие идеи: можно пытаться свести такой интеграл к одномерному, пользуясь параметризацией окружности точками полуинтервала, но можно по аналогии с интегралом на прямой составлять римановские суммы. Однако обе возможности приводят к некоторым вопросам. При первом способе хотелось бы получить какой-то инвариантный ответ, не зависящий от выбора параметризации. При втором способе действия возможны такие варианты: условившись считать, что речь идет о единичной окружности в $\mathbb{R}^2$ и отождествив $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, можно для данной непрерывной функции f брать римановские суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)|z_k - z_{k-1}|$$

для точек $z_0, \ldots, z_n$ деления окружности, но можно рассмотреть и суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

со значениями в $\mathbb{C}$, т. е. без модуля. Что правильнее? Ведь ясно, что это не одно и то же. Скажем, для функции $f(z) = 1$ второй способ приведет к нулевому интегралу, а первый к длине окружности. Оказывается, что оба способа полезны и приводят к совершенно разным видам интегрирования, между которыми, тем не менее, имеется тесная связь. Первой способ ведет к интегрированию по неотрицательной мере, а второй к интегрированию дифференциальных форм или к интегрированию по знакопеременным мерам, причем второй способ может быть сведен к первому. При этом оба вида интегрирования могут быть представлены также с помощью параметризации. Все это обсуждается ниже, но сначала представляется уместным сделать замечание о том, что не обсуждается в этом пособии — мерах Хаусдорфа. Еще столетие назад виднейший тополог XX века Феликс Хаусдорф предложил обобщение меры Лебега, позволяющее единообразно задавать меры различной «размерности» для множеств в $\mathbb{R}^n$, не требуя какого-то параметрического или иного аналитического описания этих множеств. Важно, конечно, что это обобщение дает ожидаемые значения мер для множеств, для которых есть априорные представления об их мерах (например ломаных или окружностях). Напомним, что внешняя мера Лебега λ_n^* на множествах в $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\lambda_n^*(E) = \inf\Bigl\{\sum_{j=1}^{\infty} r_j^n:\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j(r_j)\Bigr\},$$

где inf берется по всем конечным или счетным покрытиям E кубами $K_j(r_j)$ с длинами ребер r_j, с ребрами, параллельными осям координат. Множество E в кубе K с единичным ребром называется измеримым по Лебегу, если $\lambda_n^*(E) + \lambda_n^*(K\backslash E) = 1$, а в общем случае множество считается измеримым, если таковы его пересечения со всеми единичными кубами.

Конструкция Хаусдорфа такова. Зафиксируем число $\alpha \in (0, n]$, которое будет ответственно за «размерность» меры (хотя может быть и нецелым). Для всякого множества B в $\mathbb{R}^n$ его внешняя α-мера Хаусдорфа $H^\alpha(B)$ задается так. Сначала при фиксированном $\delta > 0$ положим

$$H_\delta^\alpha(B) = \inf\Bigl\{\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{diam} Q_k|^\alpha,\ B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,\ \operatorname{diam} Q_k \leqslant \delta\},$$

где inf берется по всем счетным покрытиям B замкнутыми множествами Q_k диаметра не более δ. Ясно, что $H_{\delta_1}^\alpha(B) \leqslant H_{\delta_2}^\alpha(B)$ при $\delta_1 \geqslant \delta_2$, ибо с уменьшением δ покрытий становится меньше (а инфимум больше). Поэтому существует (возможно, бесконечный) предел

$$H^\alpha(B) := \lim_{\delta\to 0} H_\delta^\alpha(B) = \sup_{\delta>0} H_\delta^\alpha(B).$$

Как и в случае обычной меры Лебега, полученная функция множества (определенная на всех множествах) не обязана быть аддитивной (точнее говоря, при допуске аксиомы выбора она точно не будет аддитивной, хотя при запрете аксиомы выбора вопрос остается темным, т. е. зависящим от привлечения каких-то иных дополнительных аксиом). Однако, как и для меры Лебега, имеется способ сузить область определения внешней меры H^α так, что на ней она окажется даже счетно-аддитивной. А именно: в качестве области определения можно взять класс $\mathcal{H}_\alpha$ всех множеств $B \subset \mathbb{R}^n$, для которых равенство

$$H^\alpha(E) = H^\alpha(E \cap B) + H^\alpha(E \backslash B)$$

верно для всякого множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Иначе говоря, всякое множество должно разбиваться множеством B на две части с условием аддитивности внешней меры. Тогда на $\mathcal{H}_\alpha$ внешняя мера H^α оказывается счетно-аддитивной (со значениями в $[0, +\infty]$), а сам класс $\mathcal{H}_\alpha$ оказывается σ-алгеброй. Кроме того, все «разумные» множества попадают в класс $\mathcal{H}_\alpha$ (хотя и могут получить бесконечные меры). В частности, в этот класс попадают все открытые и замкнутые множества, а тогда и все, что можно получить из них счетными операциями объединения, пересечения и дополнения. Наконец, для целых значений α с точностью до множителя, зависящего от α, получаются те поверхностные меры, которые и ожидаются. Скажем, при $\alpha = n$ получается мера Лебега, умноженная на константу. На самом деле обычно эти константы сразу включают в формулу (см. Богачев [**1**], Бураго, Бураго, Иванов [**2**], Эванс, Гариепи [**23**]), но для упрощения записи мы не стали этого делать. Теперь, построив меру, можно интегрировать по ней функции методом Лебега. Описанная конструкция замечательна своей простотой и тем, что не требует от измеряемых множеств просто ничего. Однако у этих достоинств есть и своя цена: обычно довольно трудно вычислять меры явно заданных множеств по указанным формулам. Поэтому далее мы будем обсуждать гораздо менее общую конструкцию, существовавшую задолго до появления мер Лебега и Хаусдорфа. Целесообразность этого обсуждения объясняется не только техническими причинами, но и известным общим важным принципом изучения математических понятий: полезно хоть кратко проходить их исторический путь развития.

Классическая конструкция развивает интуитивно понятные концепции длины кривой на плоскости и площади поверхности в пространстве для графиков гладких функций. Скажем, если кривая γ задана как график

$$\gamma = \Gamma_\varphi = \{(t, \varphi(t)),\, t \in [0, 1]\}$$

гладкой функции φ на $[0, 1]$, то понятно, что естественный кандидат на роль ее длины есть интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1 + |\varphi'(t)|^2}\, dt,$$

поскольку при делении отрезка $[0,1]$ точками $t_1,\dots,t_n$ и замены графика ломаной с вершинами в точками $(t_i,\varphi(t_i))$ мы получаем сумму

$$\sum_i \sqrt{|t_{i+1}-t_i|^2+|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|^2} =$$

$$= \sum_i \sqrt{1+|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|^2/|t_{i+1}-t_i|^2}\,|t_{i+1}-t_i|,$$

представляющую собой римановскую сумму для указанного интеграла, ибо по теореме о среднем $|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|/|t_{i+1}-t_i| = \varphi'(\xi_i)$ для некоторого $\xi_i \in [t_i,t_{i+1}]$. Похожие соображения приводят к выражению

$$\int_{[0,1]^2} \sqrt{1+|\partial\varphi/\partial x|^2+|\partial\varphi/\partial y|^2}\,dx\,dy$$

для графика гладкой функции $z=\varphi(x,y)$ на квадрате. Именно такого рода интегралами и будут ниже заданы локальные поверхностные меры.

§ 7.2. Определение поверхностного интеграла

Частную производную функции f на $\mathbb{R}^n$ по переменной x_i будем обозначать символами $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ или $\partial_{x_i} f$. Если f имеет полную производную Df (представляемую градиентом ∇f), то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \partial_{x_i} f(x) = Df(x)(e_i) = \langle \nabla f(x), e_i\rangle,$$

где $\langle u,v\rangle = u_1v_1+\dots+u_nv_n$ — скалярное произведение векторов $u=(u_1,\dots,u_n)$ и $v=(v_1,\dots,v_n)$, $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. При использовании векторов с индексами бывает удобно ставить индексы их координат сверху, например, $v_j=(v_j^1,\dots,v_j^n)$. Положим также $|v| := \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Сначала введем некоторые элементарные множества, по которым будем задавать интегралы.

7.2.1. Определение. *Пусть $k\in\{1,\dots,n\}$. Будем называть элементарной k-ячейкой в $\mathbb{R}^n$ образ открытого куба $U=\{0,1\}^k$ при непрерывно дифференцируемом отображении $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$, обладающем таким свойством: в окрестности $W\supset\varphi(U)$ имеется непрерывно дифференцируемое отображение $\psi\colon W\to\mathbb{R}^k$, обратное к φ на $\varphi(U)$. Такое отображение φ будем называть диффеоморфным вложением.*

7.2.2. Определение. *Множество M в $\mathbb{R}^n$ называется k-мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$, если всякая его точка обладает окрестностью в относительной топологии, являющейся элементарной k-ячейкой.*

Множество $\varphi(U)$ называют *картой*, открытый куб U называют *координатной окрестностью*, а отображение φ — *параметризацией*. Если две карты $\varphi(U)$ и $\psi(U)$ пересекаются, то возникает *функция перехода* $\eta_{\varphi,\psi} = \psi^{-1} \circ \varphi\colon , \varphi^{-1}(V) \to \psi^{-1}(V)$, $V = \varphi(U) \cap \psi(U)$.

Класс гладкости многообразия определяется классом гладкости локальных параметризаций. В приведенном выше определении речь идет о C^1-многообразиях, но во многих случаях принято рассматривать гладкие многообразия, т. е. многообразия класса C^∞.

Локально k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ задается как множество решений системы

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{n-k}(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где функции f_j на $\mathbb{R}^n$ имеют определенный класс гладкости (бесконечно дифференцируемы в случае гладкого многообразия), причем их градиенты линейно независимы в каждой точке. Например, гиперповерхность (многообразие размерности $n-1$) локально выглядит как множество нулей гладкой функции с ненулевым градиентом. Связь такого описания с определенным выше параметрическим вытекает из теоремы о неявной функции. Подчеркнем, что такое представление имеет место лишь локально. Некоторые хорошие поверхности (скажем, сфера) допускают простое глобальное задание. Изучение многообразий — предмет не курса математического анализа, а дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии или анализа на многообразиях (такое изучение имеет много аспектов), см. Бураго, Бураго, Иванов [**2**], Зорич [**8**], Нарасимхан [**14**], Постников [**17**], Стернберг [**20**], Шилов [**22**].

7.2.3. Определение. *Интеграл непрерывной функции f с компактным носителем в элементарной k-ячейке $K = \varphi(U)$ по k-мерной мере λ_k зададим формулой*

$$\int_K f\, d\lambda_k := \int_U f(\varphi(u))\sqrt{G_\varphi(u)}\, du,$$

где

$$G_\varphi := \det\Bigl(\Bigl\langle \frac{\partial\varphi}{\partial_{u_i}}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \Bigr\rangle\Bigr)_{i,j\leqslant k}.$$

Точно так же определяется интеграл от функции f, для которой функция $f \circ \varphi\sqrt{G_\varphi}$ интегрируема по Риману или по Лебегу.

Это определение оказывается разумным по следующим причинам:

1) оно инвариантно относительно выбора параметризации (это проверяется ниже),

2) оно дает ожидаемое значение интеграла в тех случаях, когда есть априорно естественные иные способы задать такой интеграл (примеры приведены ниже),

3) применительно к индикаторам множеств это определение приводит с точностью до постоянного множителя к k-мерной мере Хаусдорфа (доказательство этого довольно непросто и здесь не будет приводиться).

Сначала рассмотрим случай линейного отображения. Если куб U из $\mathbb{R}^k$ отображается в $\mathbb{R}^n$ линейным оператором A, то его образ оказывается k-мерным параллелепипедом в k-мерном подпространстве в $\mathbb{R}^n$, поэтому для него понятие объема уже есть, и было бы естественно ожидать такое же значения для введенной меры. Это ожидание оправдывается. Напомним, что объем параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_n$, равен квадратному корню из определителя матрицы Грама этих векторов, т. е. матрицы с элементами $\langle v_i, v_j\rangle$. В самом деле, объем указанного параллелепипеда равен модулю определителя оператора A, для которого $Ae_i = v_i$, что совпадает с $\sqrt{\det(A^*A)}$. При этом A^*A и есть матрица Грама для Ae_i.

7.2.4. Пример. Объем $A(U)$ в k-мерном подпространстве $\operatorname{Ran} A$, где $\operatorname{Ran} A = A(\mathbb{R}^k)$, равен $\lambda_k(A(U))$, причем верно равенство

$$\lambda_k(A(U)) = |\det A^*A|^{1/2} = |\det G|^{1/2},$$

где G — матрица Грама векторов Ae_i с элементами $\langle Ae_i, Ae_j\rangle$, где $e_1, \ldots, e_k$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$.

Если $k = n-1$, $Ae_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \alpha_i)$, где 1 на стоит на i-м месте и α_i — некоторые числа, то

$$\lambda_{n-1}(A(U)) = \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2}.$$

Доказательство. В самом деле, $G = A^*A$. Поэтому для доказательства первого утверждения надо воспользоваться тем, что $DA(x) = Ax$, а также упомянутой формулой для объема параллелограмма, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_k$ в $\mathbb{R}^k$. Для доказательства второго утверждения можно заметить, что получаемая в ней матрица Грама совпадает с матрицей квадратичной формы в $\mathbb{R}^{n-1}$, заданной формулой

$$Q(x) = \langle x, x\rangle + \langle \alpha, x\rangle^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Если $\alpha = 0$, то получаем единичную матрицу. Пусть $\alpha \neq 0$. Сделаем ортогональную замену координат в $\mathbb{R}^{n-1}$, при которой вектор $\alpha/|\alpha|$ станет первым базисным вектором. В новой системе координат наша квадратичная форма будет иметь вид

$$\langle y, y\rangle + |\alpha|^2 y_1^2 = (1 + |\alpha|^2)y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2,$$

ибо форма $\langle x, x\rangle$ не меняется при ортогональных заменах. Определитель диагональной матрицы полученной формы легко находится, но интересующий нас определитель с ним совпадает из-за ортогональности матрицы перехода. В задаче 7.8.1 имеется обобщение доказанного равенства. □

7.2.5. Лемма. *Пусть $\varphi_1\colon U \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi_2\colon U \to \mathbb{R}^n$ — две параметризации элементарной k-ячейки $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для всякой непрерывной ограниченной f с компактным носителем в K верно равенство*

$$\int_U f(\varphi_1(u))\sqrt{G_{\varphi_1}(u)}\,du = \int_U f(\varphi_2(u))\sqrt{G_{\varphi_2}(u)}\,du.$$

Это же верно для функций f, для которых обе функции $f \circ \varphi_1\sqrt{G_{\varphi_1}}$ и $f \circ \varphi_2\sqrt{G_{\varphi_2}}$ интегрируемы по Риману или Лебегу.

Доказательство. Из определения параметризации следует, что существует непрерывно дифференцируемое отображение $F\colon U \to U$ с непрерывно дифференцируемым обратным, для которого $\varphi_2 = \varphi_1 \circ F$. Поскольку

$$\partial_{u_i}\varphi_2(u) = D\varphi_1(F(u))DF(u)e_i,$$

где e_i — стандартный i-й базисный вектор в $\mathbb{R}^k$, то

$$\langle\partial_{u_i}\varphi_2(u), \partial_{u_j}\varphi_2(u)\rangle = \langle D\varphi_1(F(u))DF(u)e_i, D\varphi_1(F(u))DF(u)e_j\rangle.$$

Как мы знаем (см. пример 7.2.4), определитель матрицы с такими элементами равен квадрату объема V параллелепипеда, порожденного векторами $D\varphi_1(F(u))DF(u)e_i$. Этот объем, в свою очередь, равен объему параллелепипеда, порожденного векторами $DF(u)e_i$, умноженному на модуль определителя оператора T в $\mathbb{R}^k$, полученного из оператора $D\varphi_1(F(u))\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ отождествлением его k-мерного образа L с $\mathbb{R}^k$ (иначе говоря, T есть композиция $D\varphi_1(F(u))$ и изометрии $L \to \mathbb{R}^k$ (выбор изометрии не влияет на модуль определителя). Наконец, объем параллелепипеда, порожденного векторами $DF(u)e_i$, равен модулю определителя матрицы $DF(u)$, так что V в итоге совпадает с произведением модулей определителей операторов T и $DF(u)$. С другой стороны, модуль определителя T есть как раз $G_{\varphi_1}(F(u))^{1/2}$, поэтому

$$G_{\varphi_2}(u) = G_{\varphi_1}(F(u))\,|\det DF(u)|^2.$$

Таким образом,

$$\int_U f(\varphi_2(u))G_{\varphi_2}(u)^{\frac{1}{2}}\,du = \int_U f(\varphi_1(F(u)))G_{\varphi_1}(F(u))^{\frac{1}{2}}|\det DF(u)|\,du,$$

что совпадает с

$$\int_U f(\varphi_1(u))G_{\varphi_1}(u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

по формуле замены переменных. □

Из сказанного видно, что приближенно поверхностная мера множества $\varphi(U)$ задается как сумма k-мерных объемов параллелепипедов $Q_i = D\varphi(c_i)(U_i)$, равных образам при линейных отображениях $D\varphi(c_i)$ одинаковых маленьких кубиков U_i с центрами в точках c_i, на которые разбивается куб U. Сдвинутый параллелепипед $Q_i+\varphi(a_i)$ с точностью до малых порядка квадрата его ребер приближает образ кубика U_i при параметризации φ. Можно представлять себе набор параллелепипедов $Q_i+\varphi(a_i)$ как черепичное покрытие плоскими участками нелинейной поверхности $\varphi(U)$. Коэффициент искажения объема кубика U_i производной $D\varphi(c_i)$ как раз равен $G_\varphi(c_i)^{1/2}$. Таким образом, сумма объемов $Q_i+\varphi(a_i)$ есть римановская сумма для функции $G_\varphi^{1/2}$, построенная по делению куба U на кубики U_i и точкам c_i — их центрам.

Для переноса локального определения интеграла на общие многообразия воспользуемся гладким разбиением единицы. Нам нужен такой факт: для всякого k-мерного многообразия M в $\mathbb{R}^d$ найдется последовательность функций $\theta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

(i) каждая функция θ_j равна нулю вне некоторого компакта S_j содержащегося в элементарной k-ячейке K_j из M,

(ii) $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, причем каждая точка из $\mathbb{R}^n$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом компактов S_j и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\theta_j(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ясно, что в силу условия (ii) всякий компакт в $\mathbb{R}^n$ пересекается лишь с конечным числом множеств K_j, так что указанный выше ряд на самом деле на каждом компакте представляет собой конечную сумму.

7.2.6. Определение. *Интеграл от функции f, непрерывной на M и равной нулю вне некоторого компакта, зададим формулой*

$$\int_M f\,d\lambda_k := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \theta_j f\,d\lambda_k.$$

Этой же формулой зададим интеграл от функции f на M с компактным носителем, интегрируемой по всем k-ячейкам в M (в смысле, известном читателю: по Риману или Лебегу). Наконец, функция f общего вида считается интегрируемой, если интегрируемы все функции $\theta_j f^+$ и $\theta_j f^-$, где $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = -\min(f,0)$, причем сходятся ряды из их интегралов. Тогда полагаем

$$\int_M f\,d\lambda_k := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \theta_j f^+\,d\lambda_k - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j} \theta_j f^-\,d\lambda_k.$$

Ниже будут рассматриваться только функции с компактными носителями, общее определение приведено лишь для полноты картины.

Данное определение не зависит от каких-либо параметризаций, но использует фиксированное разбиение единицы. Однако можно проверить, что интеграл не зависит от выбора разбиения единицы (для общих функций от этого выбора не зависит и существование интеграла). Это видно из аддитивности полученного интеграла, вытекающей из аддитивности интеграла Римана или Лебега.

Поверхностные меры Хаусдорфа могут быть использованы для представления объемного интеграла посредством нелинейного аналога теоремы Фубини, в котором интегрирование ведется по множествам уровня $\{f = y\}$ заданной достаточно регулярной функции f, а затем по y. Точное утверждение состоит в следующем (см. обоснование в Эванс, Гариепи [**23**]).

7.2.7. Теорема. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — липшицево отображение, $n \geqslant m$. Тогда для всякой интегрируемой функции φ на $\mathbb{R}^n$ ее сужение на $f^{-1}(y)$ оказывается интегрируемым по мере Хаусдорфа H^{n-m} для почти всякого $y \in \mathbb{R}^m$ и верно равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) Jf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} \varphi\,dH^{n-m}\,dy,$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и

$$Jf = \sqrt{G_f} = \sqrt{\det((Df)^* Df)}.$$

В частности, для всякой липшицевой функции $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *верна формула Кронрода – Федерера*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(\{f=t\})\, dt.$$

Если же $|\nabla f(x)| \geqslant c > 0$, *то для всякой интегрируемой функции* φ *на* $\mathbb{R}^n$ *верно равенство*

$$\int_{\{f>t\}} \varphi(x)\, dx = \int_t^{+\infty} \int_{\{f=s\}} \frac{\varphi}{|\nabla f|}\, dH^{n-1}\, ds.$$

Эту теорему можно усилить, рассматривая еще более общие области и границы (так называемые множества с ограниченным периметром), а также более общие функции (функции из классов Соболева), см. Эванс, Гариепи [**23**].

§ 7.3. Примеры

Мы рассмотрим три примера поверхностных мер, причем в первых двух это будет просто конкретизацией определения, а в последнем, где речь идет о мерах на графиках, понадобятся некоторые вычисления.

7.3.1. Пример. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon\ (0,1) \to \mathbb{R}^n$ — инъективное непрерывно дифференцируемое отображение с производной φ', отличной от нуля. Тогда интеграл по мере λ_1 на кривой $\gamma := \varphi(0,1)$ вычисляется по формуле

$$\int_\gamma f(x)\, \lambda_1(dx) = \int_0^1 f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt,$$

где $|\varphi'(t)| = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}$. Длина компактной части γ_a^b этой кривой, являющейся образом отрезка $[a,b] \subset (0,1)$, равна

$$\lambda_1(\gamma_a^b) := \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt.$$

В данном случае каждая точка $\varphi(t)$ обладает окрестностью в γ, являющейся образом интервала J в $(0,1)$ с замыканием в $(0,1)$, При этом имеется только один элемент $\langle \varphi'(t), \varphi'(t)\rangle = |\varphi'(t)|^2$. Зачем нужно требование инъективности? Ведь и без этого требования образ интервала может быть многообразием размерности 1. Действительно, многообразием образ может и быть, однако считать интеграл по указанной формуле уже нельзя: по определению полагается покрыть компактный носитель рассматриваемой функции конечным числом образов интервалов, на которых есть инъективность, затем перейти к дизъюнктному набору множеству и уже для них применять указанную формулу. Например, если мы имеем дело с многократно проходимой единичной окружностью, полученной как образ интервала при отображении $\varphi(t) = (\cos(2\pi Nt), \sin(2\pi Nt))$, $t \in (0,1)$, где N велико, то при интегрировании единицы (что должно бы дать длину окружности 2π), мы будем получать сколь угодно большие $2\pi N$.

Итак, этот пример показывает, что даже если многообразие явным образом задано как образ куба, локальную формулу из определения интеграла нельзя применять в общем случае, так что и здесь нужно разбиение единицы.

7.3.2. Пример. Пусть двумерное многообразие M в $\mathbb{R}^3$ задано как образ $U = (0,1)^2$ при инъективном непрерывно дифференцируемом отображении $\varphi\colon\ u \mapsto (x(u), y(u), z(u))$, для которого матрица производной $D\varphi$ имеет ранг 2 в каждой точке. Тогда интеграл по M по мере λ_2 вычисляется по формуле

$$\int_M f\,d\lambda_2 = \int_U f(\varphi(u))\sqrt{E(u)G(u) - F(u)^2}\,du,$$

где

$$E(u) = (\partial_{u_1}x)^2+(\partial_{u_1}y)^2+(\partial_{u_1}z)^2,\ G(u) = (\partial_{u_2}x)^2+(\partial_{u_2}y)^2+(\partial_{u_2}z)^2,$$

$$F(u) = \partial_{u_1}x\partial_{u_2}x + \partial_{u_1}y\partial_{u_2}y + \partial_{u_1}z\partial_{u_2}z.$$

Действительно, в этом случае возникает двумерная матрица Грама с элементами

$$(\partial_{u_1}x)^2 + (\partial_{u_1}y)^2 + (\partial_{u_1}z)^2, \quad (\partial_{u_2}x)^2 + (\partial_{u_2}y)^2 + (\partial_{u_2}z)^2$$

по главной диагонали и числом $\partial_{u_1}x\partial_{u_2}x + \partial_{u_1}y\partial_{u_2}y + \partial_{u_1}z\partial_{u_2}z$ на двух остальных местах. Отметим еще, что

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

где

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u_1,u_2)}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u_1,u_2)}, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)},$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u_1,u_2)} := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2}. \end{pmatrix}$$

7.3.3. Пример. Пусть g — непрерывно дифференцируемая функция на $U=(0,1)^n$ с ограниченным градиентом. Тогда ее график

$$\Gamma_g=\{(u,g(u))\colon\ x\in U\}$$

является n-мерным многообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$, причем интеграл от непрерывной ограниченной функции f по мере λ_n на нем вычисляется по формуле

$$\int_{\Gamma_g} f\,d\lambda_n =$$
$$=\int_U f(u_1,\ldots,u_n,g(u_1,\ldots,u_n))\sqrt{1+|\nabla g(u_1,\ldots,u_n)|^2}\,du_1\cdots du_n.$$

Для обоснования заметим, что график есть образ U при отображении

$$\varphi\colon\ u_1,\ldots,u_n\mapsto(u_1,\ldots,u_n,g(u_1,\ldots,u_n)),$$

которое очевидным образом непрерывно дифференцируемо. Ясно, что образ φ является элементарной n-ячейкой в $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\partial_{u_i}g(u_1,\ldots,u_n)),$$

где 1 стоит на i-м месте. Следовательно, определитель соответствующей матрицы Грама равен $1+|\nabla g(u)|^2$ (см. пример 7.2.4). Отметим, что указанная формула остается в силе и без предположения об ограниченности градиента g, если функция $|\nabla g|$ интегрируема по U (в несобственном смысле по Риману).

7.3.4. Замечание. Стоит отметить, что посредством доказанной формулы можно было бы определять поверхностную меру на графике. Таким способом можно задать поверхностную меру на графике липшицевой функции g, если применить известную теорему Радемахера, согласно которой градиент липшицевой функции g существует почти всюду по мере Лебега (разумеется, в этом случае надо пользоваться интегралом Лебега). При этом получится мера, пропорциональная мере Хаусдорфа H_{n-1} (или даже равная, если последняя сразу вводится с надлежащим множителем).

7.3.5. Пример. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны две гиперплоскости H_1 и H_2, угол между которыми равен θ, т. е. $\cos\theta=|\langle \mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2\rangle|$, где $\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2$ — единичные нормали к H_1 и H_2. Тогда мера ортогональной проекции на H_2 множества $E\subset H_1$ равна $\cos\theta\lambda_{n-1}(E)$ (это верно для множеств, измеримых по Жордану или Лебегу). В частности, мера проекции $(n-1)$-мерного единичного куба из H_1 равна $\cos\theta$.

В самом деле, считая, что $H_2 = \{x\colon\ x_n = 0\}$ и $0 < \cos\theta < 1$ (иначе $H_1 \perp H_2$ или $H_1 = H_2$ и утверждение очевидно), получаем, что речь идет о множестве на гиперплоскости $\{x\colon\ \langle \mathrm{n}_1, x\rangle = 0\}$. Последняя является графиком линейной функции $g(x) = \eta_n^{-1}(\eta_1 x_1 + \cdots + \eta_{n-1}x_{n-1})$, $\mathrm{n}_1 = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, на H_2. Заметим, что $|\eta_n| = \cos\theta$ и

$$1+|\nabla g|^2 = 1+\frac{1}{\eta_n^2}(\eta_1^2+\cdots+\eta_{n-1}^2) = \frac{1}{\eta_n^2}(\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2) = \frac{1}{\eta_n^2} = \frac{1}{|\cos\theta|^2}.$$

Поэтому если множество $U \subset H_2$ является проекцией $E \subset H_1$, то $\lambda_{n-1}(E) = (\cos\theta)^{-1}\lambda_{n-1}(U)$.

7.3.6. Пример. Найдем площадь поверхности сферы S_{n-1} радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$. Она состоит из двух полусфер, достаточно найти площадь поверхности верхней полусферы, имеющей вид графика функции $f(x) = (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{1/2}$ на единичном шаре U_{n-1} в $\mathbb{R}^{n-1}$. Строго говоря, такая функция f не вполне подходит под рассмотренный выше пример, поскольку имеет неограниченный градиент, но охватывается более общим случаем, указанным в конце примера. Таким образом,

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1})/2 = \int_{U_{n-1}} (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{-1/2}\, dx.$$

Объемный $(n-1)$-мерный интеграл в правой части может быть вычислен более явно. При $n = 2$ получаем π непосредственным вычислением. При $n = 3$ получаем 2π переходом к полярным координатам (что приводит к вычислению интеграла от $r(1-r^2)^{-1/2}$ по r из $[0, 1]$ и умножению его на 2π). В многомерном случае также можно использовать сферические координаты, но можно и заметить, что из-за сферической инвариантности подынтегральной функции мы получаем

$$(n-1)V_{n-1}\int_0^1 (1 - r^2)^{-1/2} r^{n-1}\, dr,$$

где V_{n-1} — объем U_{n-1}. Окончательный ответ получается вычислением последнего интеграла по индукции и подстановкой известного выражения для V_{n-1}. Ответ такой: если n четно, то

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{((n-2)/2)!},$$

для нечетного n имеем

$$\lambda_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!},$$

где $(n-2)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)$. Иной способ вывода выражения для $\lambda_{n-1}(S_{n-1})$ основан на задаче 7.8.10: эту величину можно получить как предел отношения поверхностного слоя между сферами радиуса 1 и $1-h$ к h при $h \to 0$, т. е. предел $h^{-1}V_n(1-(1-h)^n)$, равный nV_n. Разумеется, этот способ хорош, если считать известным объем шара. Появление множителя n в этом ответе объясняется формулой Гаусса – Остроградского (пример 7.6.2).

§ 7.4. Дифференциальные формы

Лектору по математическому анализу бывает выгодно объявить, что студенты уже откуда-то знают, что такое дифференциальная форма. На самом деле обычно мало кто это помнит (настоящий раздел анализа — еще один повод все-таки разобраться с этим понятием). Поэтому представляется уместным кое-что напомнить.

Пусть V — линейное пространство и k — натуральное число. Функция $\psi\colon\ V^k \to \mathbb{R}$ называется k-линейной, если она линейна по каждому аргументу при фиксированных остальных. Например, 2-линейна функция $(x_1+x_2)(y_1+y_2)$ аргументов $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$, т. е. функция на квадрате плоскости.

Кососимметрической называется k-линейная функция V, меняющая знак при перестановке двух соседних аргументов (тогда и при перестановке любой пары аргументов). Разумеется, аргументы можно переставлять только в том случае, когда их более одного. Поэтому при $k=1$ линейные функции считаются по определению кососимметрическими. Для большего единообразия действия с индексами постоянные бывает удобно объявить 0-линейными кососимметрическими функциями. Предыдущая функция $(x_1+x_2)(y_1+y_2)$ не является кососимметрической, а вот функция $x_1y_2 - x_2y_1$ является. Эта функция есть частный случай k-линейной кососимметрической функции $V_k(v_1,\ldots,v_k)$ на $\mathbb{R}^k$, представляющей собой определитель $\det(v_1,\ldots,v_k)$ матрицы, в которой по столбцам записаны векторы $v_1,\ldots,v_k$, т. е. объем параллелепипеда, порожденного векторами $v_1,\ldots,v_k$, но взятый с некоторым знаком (такой определитель называют ориентированным объемом указанного параллелепипеда).

Совершенно очевидно, что всякая k-линейная форма V на $\mathbb{R}^n$ однозначно задается своими значениями на всевозможных наборах из k векторов из базиса $e_1,\ldots,e_n$ в $\mathbb{R}^n$. Конечно, не всякий способ задания значений $V(e_{i_i},\ldots,e_{i_k})$ приводит к кососимметрической форме. Ясно также, что пространство кососимметрических k-линейных форм на $\mathbb{R}^n$ конечномерно и в качестве базиса в нем можно взять следующие специальные формы:

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(v_1, \ldots, v_k) = \det(\pi_{i_1,\ldots,i_k} v_1, \ldots, \pi_{i_1,\ldots,i_k} v_k),$$

где вектор $\pi_{i_1,\ldots,i_k}(h^1, \ldots, h^n) = (h^{i_1}, \ldots, h^{i_k})$ есть проекция вектора $(h^1, \ldots, h^n)$ на k-мерное подпространство с координатами с номерами $i_1, \ldots, i_k$, т. е. берется определитель матрицы, составленный из проекций векторов $v_1, \ldots, v_k$ на подпространство переменных с индексами $i_1, \ldots, i_k$ (ориентированный k-мерный объем порожденного этими проекциями параллелепипеда).

Например,

$$(dx_1 \wedge dx_2)(u, v) = u^1 v^2 - u^2 v^1, \quad u = (u^1, \ldots, u^n), \ v = (v^1, \ldots, v^n).$$

В частности, всякая кососимметрическая n-линейная форма на $\mathbb{R}^n$ пропорциональна ориентированному объему $\det(v_1, \ldots, v_n)$. Конечно, последнее видно также из того, что кососимметрическая форма равна нулю в случае наличия пары равных аргументов, а ее значения на $e_1, \ldots, e_n$ полностью определяют значения на перестановках этих векторов. Из определения следует, что $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0$, если среди индексов i_j есть хоть одна пара равных.

Пока что левую часть приведенного выше равенства надо воспринимать как некий цельный символ, определенный посредством правой части. Однако ниже мы увидим, что этот символ можно трактовать и как составной, если отдельно определить координатные 1-формы dx_i, а также внешнее произведение форм $w_1 \wedge w_2$. В свою очередь, цельный символ dx_i ниже окажется дифференциалом координатной функции x_i. Но до поры 1-форма dx_i задается как линейный функционал, переводящий вектор $v = (v^1, \ldots, v^n)$ в координату v^i. Общий вид 1-линейной функции таков: $c_1 dx_1 + \cdots + c_n dx_n$, где c_i — числа.

При подстановке в k-форму ω на $\mathbb{R}^k$ вместо аргументов $h_1, \ldots, h_k$ векторов $Sh_1, \ldots, Sh_k$, где S — линейный оператор, возникает новая k-форма, причем

$$\omega(Sh_1, \ldots, Sh_k) = \omega(h_1, \ldots, h_k) \det S.$$

В самом деле, это верно для формы $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$, а тогда и для пропорциональных форм.

В линейной алгебре вводится внешнее умножение кососимметрических форм. Заметим, что обычное поточечное умножение приводит не к кососимметрическим формам: скажем, поточечное произведение $dx_1 \cdot dx_2$, определено на векторах, а не парах векторов, а если его задавать на парах векторов (u, v) формулой $u^1 v^2$, то при перестановке аргументов получим совсем не изменение знака. Для целей интегрирования и дифференцирования форм нам достаточно задать внешние произведения $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ просто указанной выше формулой, а затем определить произведение двух форм, разложенных по базисным, путем формального раскрытия скобок и учета знаков при перестановках, вызванных упорядочиванием произведений базисных форм. Основное правило:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Например, если $w_1 = dx_1 + dx_2$, $w_2 = dx_1 + dx_3$, то

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_2 &= dx_1 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge dx_3 = \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

где учтено, что $dx_i \wedge dx_i = 0$. Разумеется, внешне умножать можно формы разных размерностей k_1 и k_2 (результатом будет $(k_1 + k_2)$-форма). При этом $w_1 \wedge w_2 = (-1)^{k_1 k_2} w_2 \wedge w_1$.

В геометрических и физических приложениях оказывается полезным рассматривать кососимметрические формы фиксированной степени k, зависящие от точки пространства. Для формы порядка n это сводится к умножению базисной формы $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ на число $\omega(x)$ в каждой точке x.

7.4.1. Определение. *Дифференциальной формой степени* $k \geqslant 1$ *на* $\mathbb{R}^n$ *называют зависящую от точки кососимметрическую форму степени* k. *Формами степени* 0 *считают скалярные функции.*

Из сказанного выше следует, что такая форма имеет вид

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{7.4.1}$$

Аналогично вводятся дифференциальные формы и на многообразиях, но для этого надо сначала определить касательное пространство многообразия M в точке $x \in M$. После этого останется лишь назвать дифференциальной формой такой объект: для каждой точки $x \in M$ в ее касательном пространстве задана кососимметрическая форма $\omega(x)$ степени k. Касательным пространством $T_x M$ в точке x назовем образ $\mathbb{R}^k$ при производной $D\varphi(x)$ параметризующего отображения φ. Тем самым $T_x M$ оказывается k-мерным подпространством в $\mathbb{R}^n$. Часто бывает удобно и наглядно считать его «приложенным» в точке x, т. е. отождествить его с аффинным подпространством $x + D\varphi(x)(\mathbb{R}^k)$.

В случае $\mathbb{R}^n$ можно просто считать, что в каждой точке x задано одно и то же касательное пространство $\mathbb{R}^n$, что и делает k-форму зависящей от точки. Поэтому случай многообразия M в некотором смысле идейно даже проще: задание дифференциальной k-формы есть задание в касательном пространстве T_xM к каждой точке x кососимметрической формы степени k, так что здесь, вообще говоря, даже и нельзя «сравнивать» формы в разных касательных пространствах.

Касательным расслоением многообразия M называют множество пар вида (x, v), где $x \in M$, $v \in T_xv$. Читателю предлагается проверить, что для многообразия класса C^∞ касательное расслоения также оказывается многообразием класса C^∞ размерности $2n$. Переход к касательному расслоению полезен во многих задачах механики, физики, алгебры и геометрии, например, при рассмотрении динамики точки полезно учитывать не только ее координаты, но и скорость. В результаты многие важные уравнения (типа Лагранжа или Гамильтона) записываются в касательных расслоениях.

В локальных координатах на многообразии, параметризующих элементарную k-ячейку, дифференциальная форма порядка k задается выражением вида (7.4.1).

Как только появляется объект, зависящий от точки, то его можно дифференцировать или интегрировать. Не минуют этой участи и дифференциальные формы, причем замечательным образом оказывается, что для интегрирования дифференциальных форм не нужны меры: они сами себе уже меры (впрочем, у нас все же интегрирование форм будет сведено к интегрированию функций по уже знакомым поверхностным мерам).

Сначала введем определение дифференциала дифференциальной формы. Интегралу посвящен следующий параграф. Пусть ω — дифференциальная k-форма в $\mathbb{R}^n$, записанная в виде

$$\omega(x) = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

где $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$ — функции класса C^r.

Ее дифференциалом называют $(k+1)$-форму

$$d\omega(x) := \sum d\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

где

$$d\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) := \partial_{x_1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_1 + \cdots + \partial_{x_n}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_n.$$

Полученная форма также запишется через базисные формы с коэффициентами, имеющими вид частных производных первого порядка от исходных коэффициентов. Например, для

$$P(x)dx_1 \wedge dx_2 + Q(x)dx_2 \wedge dx_3 + R(x)dx_1 \wedge dx_3$$

дифференциал равен

$$(\partial_{x_3} P(x) + \partial_{x_1} Q(x) - \partial_{x_2} R(x))dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Дифференциал n-формы равен нулю, поскольку появление в форме двух одинаковых базисных dx_i делает ее нулевой.

Для единообразия дифференциалом гладкой 0-формы f, т. е. числовой функции f на $\mathbb{R}^n$, объявляют 1-форму df, заданную формулой

$$df(x)(h) = f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle,$$

т. е. как раз в соответствии с выражением для $d\omega_{i_1,\ldots,i_k}$ имеем

$$df(x) = \partial_{x_1} f(x)dx_1 + \cdots + \partial_{x_n} f(x)dx_n.$$

Тогда оказывается, что дифференциал координатной функции x_i и будет введенной выше 1-формой dx_i, так что прежний цельный символ теперь может трактоваться и как действие d на x_i.

Отметим, что

$$d(d\omega) = 0$$

для всякой формы класса C^2. Действительно, достаточно проверить это для форм вида $\omega(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Для такой формы дифференциал имеет вид (из-за равенств $dx_i \wedge dx_i = 0$)

$$\partial_{x_{k+1}} \omega(x)dx_{k+1} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k + \cdots + \partial_{x_n} \omega(x)dx_n \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Вычисляя дифференциал еще раз, замечаем, что будут получены комбинации форм вида $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ с несовпадающими $i, j > k$, причем коэффициентами служат $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(x)$. Однако все эти слагаемые сокращаются из-за того, что $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(x) = \partial_{x_j}\partial_{x_i}\omega(x)$, но $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

Форма с нулевым дифференциалом называется замкнутой, а форма, являющаяся дифференциалом какой-либо формы, называется точной. Согласно теореме Пуанкаре, всякая замкнутая форма на $\mathbb{R}^n$ точна. Для других многообразий это не всегда так, в связи с чем вводится полезный объект (пространство k-когомологий): фактор-пространство $\mathcal{H}_k$ пространства замкнутых форм класса C^∞ по точным формам (см. Львовский [**12**], Постников [**17**]).

§ 7.5. Интегрирование дифференциальных форм

Здесь вводится интегрирование дифференциальных k-форм по k-мерным поверхностям (k-мерным многообразиям), но для этого приходится вводить понятие ориентации многообразия (что вполне естественно, ибо интегрирование дифференциальных форм есть «ориентированное интегрирование».

В пространстве $\mathbb{R}^k$ положительная ориентация задается стандартным базисом. Ориентация иного базиса считается положительной или отрицательной в зависимости от знака определителя матрицы перехода к нему от стандартного базиса.

7.5.1. Определение. *Будем называть k-мерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ ориентируемым, если координатные окрестности точек можно выбрать так, что для пересекающихся карт переходные функции координатных окрестностей имеют положительные определители матриц производных.*

В этом случае в каждом касательном пространстве T_xM можно выбрать ортогональный базис $e_1(x), \ldots, e_k(x)$ так, что в локальных координатах переход от одного базиса к другому будет ортогональным оператором с определителем 1. Такой базис задает положительную ориентацию в касательном пространстве.

Следует иметь в виду, что выбор такого репера отнюдь не всегда можно сделать так, чтобы получить непрерывную зависимость от x. Например, можно показать, что на двумерной сфере в $\mathbb{R}^3$ нет даже одного непрерывного касательного векторного поля из ненулевых векторов, тем более нет непрерывно зависящего от точки касательного репера.

Например, элементарная k-ячейка ориентируема, а лист Мёбиуса нет (доказательство можно найти в Решетняк [**18**, с. 376 – 380]).

Если на гиперповерхности (многообразии размерности $n-1$) имеется непрерывное поле нормалей n, то с помощью него можно задать ориентацию касательных пространств так: в касательном пространстве T_xM брать ортогональный базис $e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x)$ так, чтобы репер $\mathrm{n}(x), e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x)$ был положительно ориентирован. Из этого видно, например, что сфера — ориентируемое многообразие.

Можно проверить, что гладкое k-мерное многообразие ориентируемо в точности тогда, когда на нем есть гладкая дифференциальная k-форма, всюду отличная от нуля (см. Решетняк [**18**]). Для целей интегрирования удобнее пользоваться такой (несколько технической) характеризацией ориентируемости.

Не всегда легко явно указать такую невырожденную ориентирующую форму. Скажем, это легко сделать для окружности в плоскости (впрочем, ориентируемость одномерного многообразия сразу ясна из определения), взяв форму $-ydx + xdy$, но не форму $dx + dy$, которая равна нулю на касательном пространстве (прямой) в точке $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, где касательный вектор пропорционален $(-1, 1)$.

Из определения следует, что на ориентируемом k-мерном многообразии можно задать непрерывную так называемую *единичную* форму ω_e, которая равна 1 на положительных ортогональных реперах из определения ориентации. Всякая иная дифференциальная k-форма ω на M имеет вид
$$\omega(x) = \varrho(x)\omega_e(x),$$
где ϱ — числовая функция.

7.5.2. Определение. *Положим*
$$\int_M \omega := \int_M \varrho(x)\,\lambda_k(dx).$$

7.5.3. Пример. Предположим, что $M \subset \mathbb{R}^n$ является образом открытого куба $U \subset \mathbb{R}^k$ при инъективном линейном отображении φ, а k-форма ω не зависит от точки. В линейном пространстве $L = \varphi(\mathbb{R}^k)$ размерности k выберем ортонормированный базис $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Тогда на L имеется единственная k-форма ω_e, для которой $\omega_e(\psi_1, \ldots, \psi_k) = 1$. Без потери общности можно считать, что L есть $\mathbb{R}^k$ со стандартным базисом $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Тогда $\omega_e = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Форма ω на $M = \varphi(U)$ имеет вид $\varrho\omega_e$, где ϱ — число. По нашему определению интеграл от ω по M равен $\varrho \cdot \lambda_k(M) = \varrho|\det\varphi|$. Число ϱ находится из равенства $\omega(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \varrho\omega_e(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \varrho$. Однако его можно вычислить и через равенство
$$\omega(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = \varrho\omega_e(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = \varrho|\det\varphi|.$$
Тем самым интеграл от ω по M оказывается равным интегралу по параметрическому кубу U от новой k-формы $\varphi^*\omega$, заданной формулой
$$\varphi^*\omega(h_1, \ldots, h_k) := \omega(D\varphi(h_1), \ldots, D\varphi(h_k)), \quad h_i \in \mathbb{R}^k.$$
Это обстоятельство имеет общий характер, как мы увидим в примере 7.5.6.

7.5.4. Пример. Рассмотрим одномерное многообразие M в $\mathbb{R}^2$, заданное как график гладкой функции g, определенной на интервале $U = (0, 1)$. Пусть на M дана 1-форма
$$v_1 dx_1 + v_2 dx_2$$

с гладкими коэффициентами. Выразим интеграл от ω по M через интеграл по поверхностной мере λ_1 на M. По нашему определению для этого полагается взять на M единичную 1-форму ω_e, записать ω как $\omega(x) = k(x)\omega_e(x)$ и проинтегрировать k по M мере λ_1. Форма ω_e также имеет вид $u_1 dx_1 + u_2 dx_2$ и равна 1 на единичном касательном векторном поле, равном $(1+|g'(t)|^2)^{-1/2}(1, g'(t))$ в точке $(t, g(t))$ для каждого t. Значит, в качестве (u_1, u_2) и надо брать это касательное векторное поле, а тогда коэффициент пропорциональности k равен скалярному произведению $\langle v, u\rangle$. Итак,

$$\int_M \omega = \int_M \langle v, u\rangle \, d\lambda_1 = \int_0^1 [v_1(t, g(t)) + v_2(t, g(t))g'(t)] \, dt,$$

где мы воспользовались еще и формулой для интеграла по графику по мере λ_1 (что привело к сокращению множителя $(1+|g'(t)|^2)^{-1/2}$).

7.5.5. Пример. Рассмотрим несколько более общий случай, когда одномерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ задано параметрически как образ гладкого инъективного отображения $\varphi\colon U = (0,1) \to \mathbb{R}^n$. Пусть на M дана 1-форма

$$v_1 dx_1 + \cdots + v_n dx_n$$

с гладкими коэффициентами. Снова в качестве единичной 1-формы ω_e берем форму, порожденную единичным касательным векторным полем u к кривой. Аналогично получаем равенство

$$\int_M \omega = \int_M \langle v, u\rangle \, d\lambda_1 = \int_0^1 [v_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + v_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)] \, dt.$$

В следующем примере используется новое понятие: *обратный образ* дифференциальной формы при отображении. Если дана параметризация $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ стандартной k-ячейки, то для всякой дифференциальной m-формы ω на $\mathbb{R}^n$ возникает дифференциальная m-форма $\varphi^*\omega$ на $\mathbb{R}^k$, заданная на векторах $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{R}^k$ формулой

$$\varphi^*\omega(x)(h_1, \ldots, h_m) := \omega(\varphi(x))(D\varphi(x)(h_1), \ldots, D\varphi(x)(h_m)).$$

В частности,

$$\varphi^*\omega(x)(e_1, \ldots, e_m) := \omega(\varphi(x))(\partial_{x_1}\varphi(x), \ldots, \partial_{x_m}\varphi(x))$$

для стандартного базиса $e_1, \ldots, e_m$. Тем самым, имеем

$$\varphi^*\omega(x) = \omega(\varphi(x))(\partial_{x_1}\varphi(x), \ldots, \partial_{x_m}\varphi(x)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Этой же формулой можно задать обратный образ дифференциальной формы при дифференцируемом отображении абстрактных многообразий (необязательно вложенных в $\mathbb{R}^n$).

7.5.6. Пример. Если $m = k$, то в описанной выше ситуации выполнено равенство

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^* \omega = \int_U \widetilde{\omega}(x)\, dx,$$

где $\varphi^*\omega(u) = \widetilde{\omega}(u) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$,

$$\widetilde{\omega}(u) = \omega(\varphi(u))(D\varphi(u)(e_1), \ldots, D\varphi(u)(e_k)).$$

Таким образом, если $\omega(x) = \omega(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, то

$$\int_M \omega = \int_U \omega(\varphi(u)) \det\Bigl[\Bigl(\pi_{i_1,\ldots,i_k} D\varphi(u)(e_i)\Bigr)_{i=1,\ldots,k}\Bigr]\, du,$$

где берется определитель матрицы размера $k \times k$, в столбцах которой стоят проекции векторов $D\varphi(u)(e_1), \ldots, D\varphi(u)(e_k)$ на k-мерное подпространство координат $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Обратим внимание, что определитель здесь появился без модуля (в отличие от интеграла по поверхностной мере). Этим и отличается интеграл формы от интеграла по поверхностной мере λ_k.

Доказательство. В касательном пространстве к многообразию M в точке $x = \varphi(u)$, т. е. в линейной оболочке векторов

$$\psi_1(x) = D\varphi(u)(e_1), \ldots, \psi_k(x) = D\varphi(u)(e_k),$$

возьмем ортогональный базис вида

$$S(\varphi(u))D\varphi(u)(e_1), \ldots, S(\varphi(u))D\varphi(u)(e_k),$$

где $S(\varphi(u))$ — линейный оператор с положительным определителем (в базисе из указанных выше векторов ψ_i). Заметим, что

$$\sqrt{G_\varphi(u)} \det S(\varphi(u)) = 1,$$

поскольку $\sqrt{G_\varphi(u)}$ — объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\psi_1(\varphi(u)), \ldots, \psi_k(\psi(u))$. Поэтому интеграл от ω, равный по определению интегралу от функции $\omega(S(x)\psi_1(x), \ldots, S(x)\psi_k(x))$ по поверхностной мере λ_k, оказывается равным интегралу по параметрическому кубу U от функции

$$\begin{aligned}\omega(S(\varphi(u))\psi_1(\varphi(u)), \ldots, S(\varphi(u))\psi_k(\varphi(u)))\sqrt{G_\varphi(u)} &=\\ = \omega(\psi_1(\varphi(u)), \ldots, \psi_k(\varphi(u))) \det S(\varphi(u))\sqrt{G_\varphi(u)} &=\\ = \omega(\psi_1(\varphi(u)), \ldots, \psi_k(\varphi(u))),&\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

7.5.7. Замечание. Можно взять полученное выше выражение интеграла формы в параметрическом представлении в качестве определения (распространив его на более общие ориентируемые многообразия с помощью гладкого разбиения единицы). Отметим один нюанс: при таком подходе инвариантность интеграла относительно выбора параметризации имеет место только в случае замен с положительным определителем матрицы производной (в отличие от интегрирования по поверхностным мерам). Эта чувствительность к выбору ориентации объясняет также требование ориентируемости многообразия. Локальное определение в карте нечувствительно к ориентируемости, но для корректного глобального определения она нужна.

7.5.8. Пример. В свете предыдущего примера вернемся к интегрированию 1-формы $\omega = \omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n$ по кривой γ, заданной параметрически инъективным гладким отображением с невырожденной производной

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^n.$$

Получаем, что интеграл от формы ω по кривой γ равен интегралу по $[0,1]$ от $\omega_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + \omega_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)$, что, разумеется, совпадает с приведенным ранее ответом. Таким образом, вычисление состоит просто в формальной замене dx_i выражением $\gamma_i'(t)dt$ и постановке $\gamma(t)$ в ω с последующим интегрированием по t.

Аналогично при интегрировании 2-формы $f(x,y,z)dx \wedge dy$ по двумерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, заданной параметрически отображением $\varphi\colon\ (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $U \to \mathbb{R}^3$, делаем следующее: заменяем dx на $\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, а dy на $\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$, по известным нам правилам раскрываем скобки в полученном выражении для $dx \wedge dy$, что дает

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}du \wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}dv \wedge du = \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Bigr)du \wedge dv,$$

наконец, не забываем умножить это на $f(x(u), y(u), z(u))$ и проинтегрировать по множеству U. Общая 2-форма на $\mathbb{R}^3$ отличается еще слагаемыми $g dy \wedge dz$ и $h dx \wedge dz$, которые рассматриваются совершенно аналогично. Случай 2-форм в многомерных пространствах не отличается принципиально, а при интегрировании таким способом 3-форм в многомерных пространствах отличие состоит лишь в появлении гораздо более громоздких выражений. Если поверхность имеет более сложный вид и не параметризуется единым отображением, она разбивается на куски, к которым применимы описанные вычисления.

Отметим, что по поверхностной мере мы интегрировали числовые функции, а не формы, при интегрировании формы функции нет, поэтому в принципе не должно возникать путаницы. Все же имеются два случая, когда некоторая путаница возможна.

Первый случай — интегрирование функции 1 по поверхностной мере (что дает положительное число), которое не следует смешивать с интегралом от формы, что тоже выглядит как интеграл от 1, но может быть любым числом. Это усугубляется тем, что интегрирование функции f по области в $\mathbb{R}^n$ и есть интегрирование формы $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Более того, в общем случае функцию f можно интегрировать «по форме» ω путем интегрирования новой формы $f \cdot \omega$ (естественно, и здесь для положительной функции f может получиться отрицательный интеграл).

Второй случай — интегрирование функции f комплексного переменного по кривой γ в комплексной плоскости. Обычно в комплексном анализе соответствующий интеграл есть именно интеграл от 1-формы $f(z)dz$, а вовсе не интеграл от f по одномерной мере λ_1. Скажем, интеграл от 1 по единичной окружности оказывается нулевым, а не ее длиной, как было бы при интегрировании по линейной мере λ_1. На уровне параметризации $\varphi\colon\ [0,1) \to \mathbb{C}$ разница вот в чем: первый интеграл есть интеграл от $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ по $[0,1)$, а второй интеграл есть интеграл от $f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$. В многомерном случае аналогичная разница. На уровне римановских сумм разница такова: в первом случае берутся суммы вида $\sum f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$ по точкам z_i деления кривой, а во втором случае суммы $\sum f(z_i)|z_{i+1} - z_i|$.

Развитие интегрирования дифференциальных форм по кривым и поверхностям в значительной степени мотивировалось задачами механики, электродинамики, гидромеханики и другими приложениями, о чем можно прочитать в Зорич [**8**]. Один из базовых примеров: вычисление работы векторного поля $F = (F^i)$ на плоскости или в пространстве при перемещении материальной частицы единичной массы по кривой γ. Предполагая, что работа по перемещению на вектор ξ в случае постоянного поля равна $\langle F, \xi\rangle$, получаем, что в случае непрерывного переменного поля искомая работа равна приближенно $\sum\langle F(x_i), x_{i+1} - x_i\rangle$ при достаточно мелком делении кривой точками x_i. В свою очередь, последняя сумма приближенно равна

$$\sum\langle F(x(t_i)), x'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\rangle,$$

если $x_i = x(t_i)$, $x(\cdot)$ — параметризация данной кривой. Таким образом, получили суммы Римана для интеграла от функции $\langle F(x(t)), x'(t)\rangle$ по отрезку параметризации, т. е. для интеграла от формы $\sum F^i\,dx_i$ по кривой. Другой пример: закон Фарадея утверждает, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводнике γ в переменном магнитном поле B, пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля через ограниченную проводником поверхность S. В терминах интегралов от дифференциальных форм этот закон записывается как следующее соотношение для вектора напряженности $E = (E^1, E^2, E^3)$ электрического поля:

$$\int_\gamma E^1dx + E^2dy + E^3dz = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \langle B, \mathrm{n}_S\rangle\, d\lambda_2.$$

Именно для таких задач и выводились классиками различные формулы, связывающие объемные и поверхностные интегралы.

§ 7.6. Формула Гаусса – Остроградского

В анализе центральной является формула Ньютона – Лейбница, выражающая интеграл от производной функции по отрезку через значения функции в концах этого отрезка. Эта формула имеет важные многомерные аналоги. Простейший многомерный вариант формулы Ньютона – Лейбница возникает, если взять непрерывно дифференцируемую функцию f на квадрате $U = (0,1)^2$ и проинтегрировать по квадрату ее частную производную по x_1 с использованием формулы Ньютона – Лейбница для горизонтальных отрезков:

$$\int_U \partial_{x_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 [f(1,x_2) - f(0,x_2)]\,dx_2.$$

Чтобы продвинуться дальше, надо догадаться, что увеличение размерности делает естественным рассмотрение еще одной функции g, для которой такая же процедура делается по второй переменной. Это дает

$$\int_U \partial_{x_2} g(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 [g(x_1,1) - g(x_1,0)]\,dx_1.$$

Если полученные формулы сложить, то слева мы получим интеграл по U от функции $\partial_{x_1} f + \partial_{x_2} g$, представляющей собой дивергенцию векторного поля $w = (f,g)$. В правой части получится интеграл по границе квадрата от некой функции, которая равна f или g (со знаками) на различных отрезках границе. Если ввести еще внешнюю единичную нормаль $\mathrm{n}_{\partial U}$ к границе квадрата (она равна $(1,0)$ на правом вертикальном отрезке γ_1, $-(1,0)$ на левом вертикальном отрезке γ_0, $(0,1)$ на верхнем горизонтальном отрезке γ_2 и $-(0,1)$ на нижнем горизонтальном отрезке γ_3), то окажется, что в правой части стоит интеграл от $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ по границе, поскольку $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = f$ на γ_1, $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = -f$ на γ_0, $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = g$ на γ_2, $\langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle = -g$ на γ_3. В итоге получается замечательная формула

$$\int_U \operatorname{div} w\, d\lambda_2 = \int_{\partial U} \langle w, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle\, d\lambda_1.$$

Единственная неприятность состоит в том, что множество ∂U, состоящее из четырех отрезков, не подпадает под данное выше определение одномерного многообразия. Правда, если исключить четыре угловых точки и брать объединение интервалов, то все будет в порядке.

Приведем без доказательства (которое весьма сложно, несмотря на кажущуюся простоту формулировки) формулу Гаусса – Остроградского в весьма общем виде. Напомним, что в замечании 7.3.4 был указан способ задания поверхностной меры на графике липшицевой функции.

Будем говорить, что открытое множество U имеет локально липшицеву границу ∂U, если для каждой точки $a \in \partial U$ можно сдвигом и ортогональным преобразованием перейти к координатам, в которых при некотором $r > 0$ пересечение куба $Q(a, r) = \{x\colon\ |x_i - a_i| < r\}$ с множеством U имеет вид $\{x \in Q(a, r)\colon\ x_n < g(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ с некоторой функцией g, удовлетворяющей условию Липшица. В этом случае пересечение ∂U с указанным кубом есть график функции g. В случае ограниченной области с локально липшицевой границей эта граница покрывается конечным числом кубом с указанным свойством.

7.6.1. Теорема. *Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей ∂U. Тогда почти всюду относительно меры λ_{n-1} на ∂U задана внешняя нормаль $\mathrm{n}_{\partial U}$ и для всякого векторного поля $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ верно равенство*

$$\int_U \operatorname{div} v\, dx = \int_{\partial U} \langle v, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle\, d\lambda_{n-1}.$$

Более того,это же равенство верно для всякого липшицева векторного поля v.

Мы обсудим доказательство этой формулы в специальном случае, когда U имеет следующий вид:

$$U = \{x\colon\ (x_1, \ldots, x_{n_1}) \in V,\ 0 < x_n < g(x_1, \ldots, x_{n_1})\},$$

где $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $g > 0$, V — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$ с границей класса C^1. Типичный вид U изображен на рис. 1.

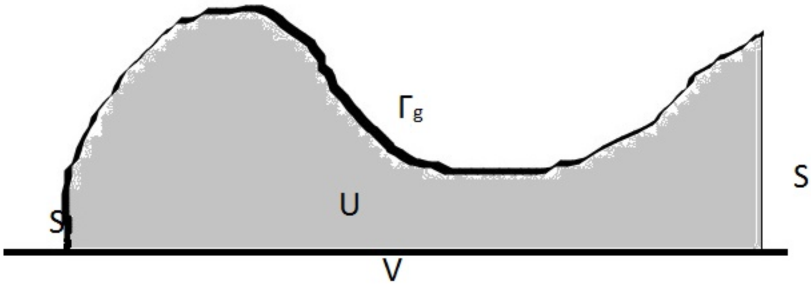

Рис. 1. Подграфик

В этом случае граница U состоит из дна (замыкание V), крыши (график g) и боковой поверхности S:

$$\partial U = \overline{V} \bigcup \Gamma_g \bigcup S,$$

$$S = \{x\colon\ (x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \partial V,\ 0 \leqslant x_n \leqslant g(x_1, \ldots, x_{n_1})\}.$$

Интеграл по U от $\partial_{x_n} v_n$ по теореме Фубини и формуле Ньютона – Лейбница, применяемой при интегрировании по x_n, равен интегралу от $v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) - v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ по V.

С другой стороны, на боковой поверхности нормаль ортогональна e_n, поэтому интеграл от $\langle v_n e_n, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ по S равен нулю. На донной части границы внешняя нормаль есть просто $-e_n$, что при интегрировании $\langle v_n e_n, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ как раз дает интеграл от $-v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ по V. На графике функции g нормаль пропорциональна вектору $(-\nabla g, 1)$ длины $(1+|\nabla g|^2)^{1/2}$. Поэтому при интегрировании $\langle v_n e_n, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ по крыше фигурирующий при вычислении поверхностного интеграла множитель $(1 + |\nabla g|^2)^{1/2}$ сокращается с таким же множителем отрицательной степени, равным длине проекции нормали на e_n. В результате этот поверхностный интеграл по графику оказывается интегралом от $v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ по V.

Если бы не было компонент $v_1, \ldots, v_{n-1}$, то доказательство было бы закончено. Более того, мы бы охватили область вида

$$U = \{x\colon\ (x_1, \ldots, x_{n_1}) \in V,\\ g_0(x_1, \ldots, x_{n_1}) < x_n < g(x_1, \ldots, x_{n_1})\}, \quad (7.6.2)$$

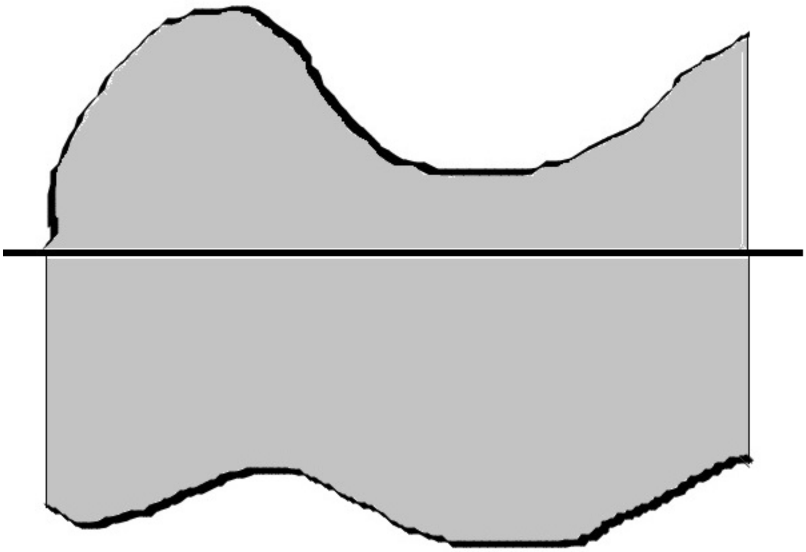

Рис. 2. Фигура между двумя графиками

где $g_0, g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $g > g_0$, V — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$ с границей класса C^1. Типичный вид такой области изображен на рис. 2.

Но что делать, если другие компоненты есть? Естественно было бы считать, что для размерности $n-1$ нужная формула уже доказана, а затем рассуждать по индукции, вычисляя интеграл от выражения $\partial_{x_1} v_1 + \cdots + \partial_{x_{n-1}} v_{n-1}$ по U по теореме Фубини. Здесь возникают сразу две трудности. Первая состоит в том, что сечение

$$U_{x_n} := \{y \in \mathbb{R}^{n-1}\colon\ (y, x_n) \in U\}$$

при фиксированном x_n уже не обязано быть областью, к которой применимо предположение индукции, даже если функция g бесконечно дифференцируема. Правда, согласно известной теореме Сарда об образе множества критических точек (см. Львовский [**12**]), множество точек x_n, для которых такая неприятность возникает, имеет меру нуль. Допустим, однако, что мы включим отсутствие такой неприятности в условие. Тогда мы получим равенство

$$\int_{U_{x_n}} [\partial_{x_1} v_1 + \cdots + \partial_{x_{n-1}} v_{n-1}]\, dx_1 \cdots dx_{n-1} = \\ = \int_{\partial U_{x_n}} \langle v^1 + \cdots + v^{n-1}, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle\, d\lambda_{n-2},$$

где мы учли, что нормаль к сечению боковой поверхности совпадает с нормалью к самой боковой поверхности. После интегрирования по x_n получаем в левой части объемный интеграл, но возникает еще дополнительная задача: показать, что интеграл по x_n от поверхностного интеграла по мере λ_{n-2} равен поверхностному интегралу по боковой поверхности по мере λ_{n-1} (ведь доказанная ранее теорема Фубини дает такое равенство только для плоских мер). Эту трудность тоже можно преодолеть, но все вместе оказывается слишком трудоемким, поэтому обычно используется гораздо более простой рецепт: вводится *дополнительное предположение*, что область U устроена указанным в (7.6.2) образом по отношению к каждой переменной (см. рис. 3)! Разумеется, это еще более сужает класс допустимых областей, но жульничеством не является: дело в том, что такой весьма частный случай позволяет на самом деле охватить значительно более общую ситуацию, когда рассматриваемая область может быть разбита в объединение конечного числа частей описанного вида (выглядящих как множества между графиками функций на областях в гиперподпространствах по каждой из координат, но при этом можно делать ортогональные замены координат), не имеющих общих внутренних точек (см. рис. 4). Действительно, в этой ситуации при наличии общих участков границ в результирующей формуле не будет производиться интегрирование по этим общим участкам, поскольку нормали к граничащим областям на них противоположны, так что интегралы по таким участкам сокращаются.

7.6.2. Пример. Пусть U — единичный шар с центром в нуле. Тогда

$$\int_U \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle v(s), s\rangle\, \lambda_{n-1}(ds).$$

Если применить эту формулу к полю $v(x) = x$, дивергенция которого равна $\partial_{x_1} x_1 + \cdots + \partial_{x_n} x_n = n$, то в силу равенства $\langle v(s), s\rangle = 1$ на единичной сфере получаем формулу $n\lambda_n(U) = \lambda_{n-1}(\partial U)$, уже полученную ранее иным способом.

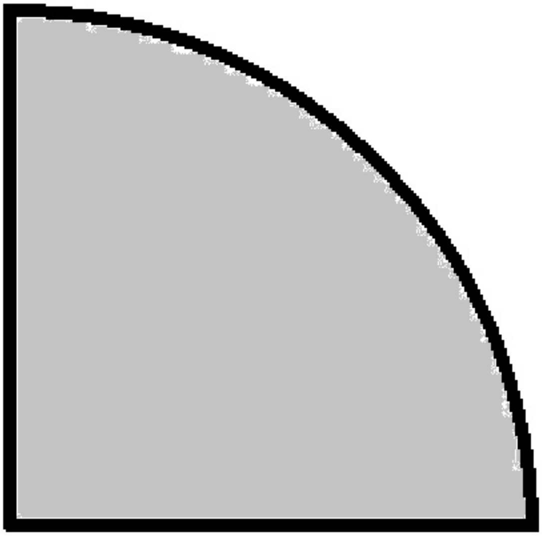

Рис. 3. Фигура, хорошая по обеим координатам

Более общим образом, это же соображение показывает, что для ограниченной области Ω с гладкой границей имеет место равенство

$$\lambda_n(\Omega) = n^{-1} \int_{\partial\Omega} \langle s, \mathrm{n}_{\partial\Omega}(s)\rangle \, \lambda_{n-1}(ds).$$

7.6.3. Пример. Пусть функция u класса C^2 на $\mathbb{R}^3$ является гармонической в области Ω, т.е.

$$\Delta u(x) := \partial^2_{x_1} u(x) + \partial^2_{x_2} u(x) + \partial^2_{x_3} u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Заметим, что

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u).$$

Поэтому для всякой области U с гладкой границей, лежащей с замыканием в Ω, верно равенство

$$0 = \int_U \Delta u(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle \nabla u, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle \, d\lambda_2,$$

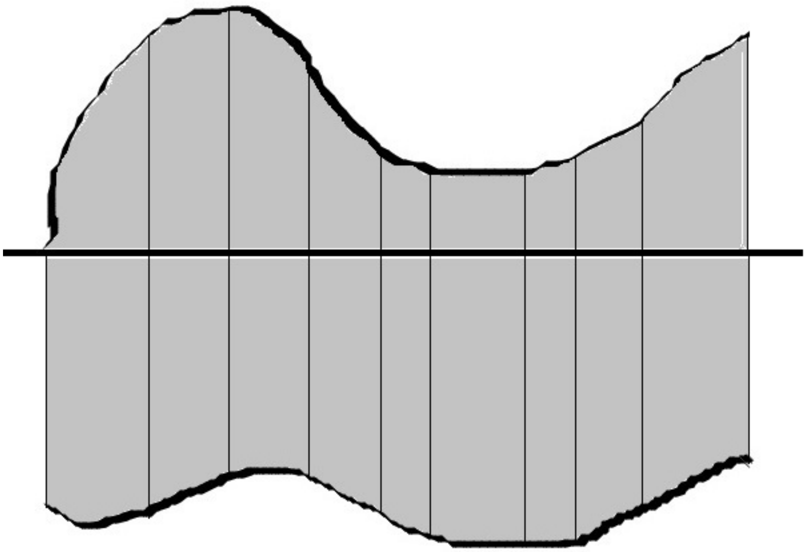

Рис. 4. Составная фигура

где λ_2 — поверхностная мера на ∂U. Таким образом, производная u по нормали имеет нулевое среднее по границе. Из этого следует, в частности, что эта производная обязана где-то обращаться в нуль на границе.

7.6.4. Пример. Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей. Тогда оператор Лапласа Δ на области определения $C_0^\infty(\Omega)$, состоящей из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω, симметричен, т. е.

$$\int_\Omega f\Delta g\,dx = \int_\Omega g\Delta f\,dx, \quad f, g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Для доказательства заметим, что

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f\nabla g)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle f\nabla g, \mathrm{n}_{\partial\Omega}\rangle\,d\sigma = 0,$$

где σ — поверхностная мера, ибо $f = 0$ на границе. При этом

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle,$$

что легко проверяется непосредственно с учетом равенства

$$\partial_{x_i}(f\partial_{x_i}g) = \partial_{x_i}f\partial_{x_i}g + f\partial^2_{x_i}g.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega f\Delta g\,dx = -\int_\Omega \langle\nabla f, \nabla g\rangle\,dx,$$

что симметрично по f, g (попутно получена полезная формула Грина, выраженная предыдущим равенством).

7.6.5. Замечание. В обсуждаемом круге вопросов имеется одна объективная трудность, с которой сталкиваются и читатели учебных пособий, и особенно их авторы: интегрирование функций и форм развивается для «гладких многообразий» с «гладкими границами», а при определении «гладкого многообразия» используется параметризация отображениями куба, граница которого не является гладкой! Получается довольно забавная ситуация: построенная замечательная теория не охватывает исходный куб (а также такие классические фигуры, как тетраэдр и конус!). Конечно, именно для куба, тетраэдра и конуса можно предложить свои особые рецепты ad hoc (типа исключения угловых точек квадрата), но выглядит это не очень привлекательно. Правда, можно ввести несколько более техническое понятие «кусочно гладкой поверхности» (см. Зорич [**8**]), покрывающее перечисленные классические фигуры и многие другие, нужные для простейших приложений, однако аккуратные обоснования на этом пути весьма трудоемки (в [**8**] они проведены лишь в некоторых частных случаях). Более принципиальным выходом из затруднения является привлечение липшицевых границ (как в теореме 7.6.1), но это технически очень тяжелый путь. На первый взгляд кажется, что поможет параметризация отображениями шаров, а не кубов, но в действительности это не оказывается полезным (например, из-за того, что при использовании кубов гораздо прозрачнее многие построения, привлекающие теорему Фубини и повторное интегрирование). Во всяком случае, обычно так не делают. Есть еще один подход, в котором используется понятие «сингулярного k-куба», т. е. просто гладкое отображение k-мерного куба в $\mathbb{R}^n$ (уже необязательно диффеоморфное вложение), причем «границей» такого сингулярного куба объявляется отображение граней отображаемого куба, снабженных естественными ориентациями. Это приводит к полезной комбинаторной теории, но не решает отмеченную проблему, поскольку при таком подходе фактически не рассматриваются образы отображений (так что на этих образах не возникает никаких мер, причем как множества они могут быть устроены очень сложно, скажем, отнюдь не являться областями с липшицевыми границами), а комбинаторные границы могут не иметь ничего общего с истинными границами образов кубов. Можно сказать, что возникает некоторая виртуальная теория интегрирования форм, область применения которой мало пересекается с приложениями теории интегрирования на областях с липшицевыми границами.

§ 7.7. Формула Стокса

Формула Гаусса – Остроградского может быть получена как частный случай общей формулы Стокса, представленной ниже.

Для формулировки формулы Стокса (а также для некоторых других целей) полезно ввести понятие края многообразия, в некотором смысле обобщающее понятие границы гиперповерхности, но применимое уже не только к поверхностям коразмерности один. Например, краем мыльной пленки, натянутой на контур в трехмерном пространстве, будет служить этот контур, хотя топологически границей будет не только контур, но и вся пленка. Для этого будем рассматривать более общие k-мерные многообразия в $\mathbb{R}^n$ («многообразия с краем»), в определение которых вводится следующее изменение: в качестве окрестностей точки a многообразия M разрешаются как множества, диффеоморфные открытому кубу в $\mathbb{R}^k$, так и множества, диффеоморфные (в прежнем смысле) «полуоткрытому» кубу P вида $(0,1]\times(0,1)\times\cdots\times(0,1)$. *Краем* P будем называть подмножество $\partial P\subset P$ всех точек с $x_1=1$. Обратим внимание на неравноправие координат: по остальным координатам перемножаются открытые интервалы. Например, на плоскости мы получаем открытый квадрат, с присоединенным правым вертикальным отрезком без угловых точек. Его краем считается открытый вертикальный интервал (причем последний уже не имеет края, а оказывается одномерным многообразием без края).

Краем многообразия M называют множество ∂M его точек, имеющих окрестности, в которых они соответствуют в координатном виде точкам из края полуоткрытого куба P. Из теоремы об обратной функции явствует, что принадлежность к краю определена инвариантно: при диффеоморфизме куба внутренние точки переходят во внутренние.

Из определения следует, что ∂M является $(k-1)$-мерным многообразием без края.

Даже для n-мерных многообразий в $\mathbb{R}^n$ край может не совпадать с топологической границей. Например, открытый квадрат на плоскости является многообразием без края. К нему можно присоединить один, два, три или четыре открытых интервала его топологической границы (без угловых точек), это будут разные многообразия с разными краями (угловые точки при нашем подходе нельзя присоединить, но можно, если ввести более общие липшицевы многообразия). Лучше дело обстоит с кругом: открытый круг — многообразие без края, замкнутый круг — многообразие с краем (являющимся окружностью). Аналогично будет и с шаром. К открытому кругу можно добавить не всюду окружность, а лишь открытую дугу (без концов), что также даст многообразие с краем. Таким образом, край не определяется однозначно по замыканию множества, а должен быть отдельно указан. При обсуждении интегрирования мы в основном будем иметь дело с компактными многообразиями с краем (типа шара), но по упомянутым выше причинам иногда приходится иметь дело с несколько искусственной ситуацией типа квадрата с исключенными вершина, чтобы оставаться в рамках гладких многообразий.

Для интегрирования дифференциальных форм важен тот факт, что край ∂M ориентируемого многообразия M оказывается ориентируемым многообразием. Это нетрудно вывести из определений (см., например, Решетняк [**18**]). Заметим также, что в k-мерном касательном пространстве T_xM в точке $x \in \partial M$ имеется $(k-1)$-мерное линейное подпространство $T_x\partial M$, касательное к краю. Это ясно из описания края в локальных координатах. Следовательно, есть ровно два единичных вектора в T_xM, ортогональных $T_x\partial M$. Опять же из определения краевой точки в локальных координатах следует, что лишь один из этих двух векторов, называемый внешней нормалью к краю и обозначаемый через $\mathrm{n}_{\partial M}(x)$, удовлетворяет условию $x + t\mathrm{n}_{\partial M}(x) \notin M$ при достаточно малых $t > 0$. Можно проверить (в локальных координатах), что вектор $\mathrm{n}_{\partial M}(x)$ непрерывно зависит от x. Для бесконечно дифференцируемых многообразий зависимость оказывается гладкой. Теперь ориентирующий ортогональный репер $e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$ края зададим так: будем требовать, чтобы расширенный репер

$$\mathrm{n}_{\partial M}(x), e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$$

имел ту же ориентацию, что заранее данный ориентирующий ортогональный репер (существующий по условию). Эти соображения можно использовать и для задания ориентации края. В терминах ненулевых дифференциальных форм (более созвучных нашему определению) проверка сводится к рассмотрению формы

$$(h_1, \ldots, h_{k-1}) \mapsto \omega_e(x)(\mathrm{n}_{\partial M}(x), h_1, \ldots, h_{k-1}),$$

которая отлична от нуля на $T_x\partial M$. В самом деле, если бы оказалась нулевой, то она была бы равна нулю и на репере $e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x)$, но тогда форма $\omega_e(x)$ была бы нулевой на T_xM, поскольку k векторов $\mathrm{n}_{\partial M}(x), e_1(x), \dots, e_{k-1}(x)$ образуют базис в T_xM.

Основной пример: для полуоткрытого куба

$$P = (0,1] \times (0,1) \times \cdots \times (0,1)$$

его край ∂P (грань $x_1 = 1$) имеет обычную ориентацию с точки зрения координатного пространства $x_2, \dots, x_k$. Скажем, на плоскости ($k = 2$) это соответствует тому, что при движении вверх по правому ребру квадрат оказывается слева. Отсюда общее правило для плоской области: при обходе границы против часовой стрелки область остается слева. Здесь мы не будем обсуждать, почему обход надо делать именно против часовой стрелки (можно считать, что потому, что так ходят часы в столовой НМУ).

7.7.1. Теорема. (Формула Стокса) *Пусть M — компактное ориентируемое многообразие размерности $k+1$ с краем. Тогда для всякой k-дифференциальной формы ω класса C^1 на M верно равенство*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{7.7.3}$$

Доказательство. По определению интеграла от формы, использующего гладкие разбиения единицы, обоснование достаточно провести для формы с компактным носителем, лежащим в стандартной $(k+1)$-ячейке $\varphi(U)$. Таким образом, можно считать, что мы имеем дело с формой вида $\omega(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ в полуоткрытом кубе $P = (0,1] \times (0,1) \times \cdots \times (0,1)$ или с формой $\omega(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{k+1}$, причем носитель функции ω лежит в этом кубе. В первом случае дифференциал формы имеет вид

$$(-1)^k \partial_{x_{k+1}} \omega(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k+1},$$

что при интегрировании по P дает нуль, так как при этом интегрировании мы можем сначала интегрировать по x_{k+1}, что даст значения функции ω на тех гранях куба P, где она равна нулю в силу нашего предположения о ее носителе (это предположение допускает ненулевые значения ω лишь на грани с $x_1 = 1$).

Во втором случае дифференциал формы имеет вид

$$\partial_{x_1} \omega(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k+1},$$

что при интегрировании по P дает (сразу после интегрирования по x_1 на основании теоремы Фубини) интеграл от ω по ∂P, поскольку грани с $x_1 = 0$ функция ω равна нулю в силу нашего предположения о ее носителе. В этом вычислении становится важной согласованность ориентации края и всего многообразия, ведь иначе мы бы получили интеграл по грани со знаком минус. Скажем, в одномерном случае ($M = (0,1]$) интеграл от ω' по $(0,1]$ равен именно $\omega(1)$, а не $-\omega(1)$. Это объясняет выбор в качестве края множества $x_1 = 1$, а не $x_1 = 0$: тогда бы пришлось ставить знак минус перед интегралом по краю (или иначе его ориентировать). □

Легко заметить сходство обоснований формул Стокса и Гаусса – Остроградского (при наших упрощающих предположениях, конечно): обе фактически являются следствиями формулы Ньютона – Лейбница и теоремы Фубини после локализации.

Формула Гаусса – Остроградского получается из формулы Стокса так: берется $(n-1)$-форма

$$\omega = v_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n + (-1)v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + \\ + (-1)^{n+1} v_n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}.$$

Дифференциал этой формы равен $(\operatorname{div} v) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Интеграл от нее по ∂U есть как раз интеграл от функции $\langle v, \mathrm{n}_{\partial U}\rangle$ по поверхностной мере λ_{n-1}. В самом деле, по определению интеграл формы есть интеграл от функции ϱ, которая находится из равенства

$$\varrho(x) = \omega(x)(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)),$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ — какой-либо ортогональный репер в касательном пространстве в x, для которого репер $\mathrm{n}_{\partial U}(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ имеет положительную ориентацию. Из-за аддитивности интеграла следует, что достаточно рассмотреть случай, когда лишь одна компонента v_i отлична от нуля. Скажем, пусть это v_1. Тогда

$$dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x))$$

есть площадь проекции куба, порожденного $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$, на плоскость $x_1 = 0$. Ввиду примера 7.3.5 это равно $\langle e_1, \mathrm{n}_{\partial U}(x)\rangle$ с учетом знаков. Итак, $\varrho(x)$ совпадает с $\langle v(x), \mathrm{n}_{\partial U}(x)\rangle$. Для v_2 знак минус дает положительную ориентацию репера.

Однако из общей формулы Стокса можно извлечь и другие полезные формулы. Мы сделаем это для области на плоскости, ограниченной кривой, и в трехмерном пространстве для двумерной поверхности, ограниченной одномерной кривой. Кроме того, мы приведем векторный вариант формулы Стокса.

7.7.2. Пример. (Формула Грина) Пусть D — ограниченная область на плоскости с гладкой границей, функции P и Q непрерывно дифференцируемы в окрестности замыкания D. Тогда верна формула Грина

$$\int_D \Bigl(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Bigr)\, dx\, dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

В самом деле, мы имеем $d(Pdx) = \partial_y P dy \wedge dx = -\partial_y P dx \wedge dy$, $d(Qdy) = \partial_x Q dx \wedge dy$.

7.7.3. Пример. Пусть S — компактная ориентированная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂S, функции P, Q и R непрерывно дифференцируемы в окрестности замыкания S. Тогда верна формула Стокса

$$\int_S \Bigl(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Bigr)\, dy\wedge dz + \Bigl(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Bigr)\, dz\wedge dx + \Bigl(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Bigr)\, dx\wedge dy =$$
$$= \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Обратим внимание, что если вместо $dz \wedge dx$ написать $dx \wedge dz$, как мы обычно делаем, то в функциональном множителе надо сменить знак. Проверка опять сводится к дифференцированию 1-формы: например, $d(Pdx) = -\partial_y P dx \wedge dy + \partial_z P dz \wedge dx$.

Для векторного поля $A := (P, Q, R)$ векторное поле с компонентами

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

называется *ротором* и обозначается символом $\operatorname{rot} A$. Ротор может быть получен как формальный определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

с выделением коэффициентов при e_1, e_2, e_3.

Приведенные выше формулы можно записать в векторном виде, если с помощью поверхностных мер задать векторные меры. А именно: на кривой γ зададим единичное поле касательных векторов $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ и с его помощью зададим векторную меру $\mathbf{l}$ так: для скалярной функции f ее интеграл по мере $\mathbf{l}$ есть вектор, компоненты которого вычисляются как интегралы от fv^i по одномерной мере на кривой. Интеграл от векторной функции $\mathbf{w}$ по векторной мере $\mathbf{l}$ есть интеграл от скалярной функции $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Аналогично поверхностная мера на двумерной поверхности S позволяет задать векторную меру s с помощью внешней единичной нормали n_S к поверхности. Тогда интеграл от векторной функции $\mathbf{A}$ по векторной мере s считается как интеграл от $\langle \mathbf{A}, \mathrm{n}_S \rangle$ по S. Следовательно, указанные выше формулы могут быть записаны в виде

$$\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad \int_U \mathrm{div}\,\mathbf{A}\, dx = \int_{\partial U} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

Можно выписать также следующее более общее правило. Пусть φ — линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в пространство функций или в пространство векторных полей. Положим

$$\varphi(\nabla) := \partial_{x_1}\varphi(e_1) + \partial_{x_2}\varphi(e_2) + \partial_{x_3}\varphi(e_3).$$

Например, если f — фиксированная функция и $\varphi(x) = f \cdot x$, то получаем $\varphi(\nabla) = \nabla f$. Если для фиксированного поля v взять $\varphi(x) = \langle x, v \rangle$, то $\varphi(\nabla) = \mathrm{div}\, v$, а если $\varphi(x) = [x, v]$, то $\varphi(x) = \mathrm{rot}\, v$. При этих соглашениях верна формула

$$\int_D \varphi(\nabla)\, dx = \int_{\partial D} \varphi(\mathrm{n})\, d\lambda_2.$$

При указанных выше опциях получаем уже известные формулы.

Операторы типа $\Delta, \nabla, \mathrm{div}\,, \mathrm{rot}$ — важнейшие средства математической физики, почти все фундаментальные уравнения физики описываются в терминах таких операторов. Скажем, в знаменитые уравнения Максвелла входят уравнения вида $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\varrho$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

§ 7.8. Задачи

7.8.1. Доказать, что определитель матрицы Грама $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j\leqslant k}$ набора из k векторов $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n)$ в $\mathbb{R}^n$ равен сумме

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} |\det V_{i_1,\ldots,i_k}|^2,$$

где $V_{i_1,\ldots,i_k}$ — матрица размера $k \times k$, строками которой служат векторы $(v_1^{i_1}, \ldots, v_1^{i_k})$, $\ldots$, $(v_k^{i_1}, \ldots, v_k^{i_k})$, полученные проектированием исходных векторов на k-мерное пространство координат $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

7.8.2. Доказать, что для всякого непустого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ найдется конечное или счетное множество открытых попарно непересекающихся кругов в U, дополнение объединения которых до U имеет меру нуль.

7.8.3. Доказать, что внешняя мера Лебега λ_n^* на $\mathbb{R}^n$, заданная формулой

$$\lambda_n^*(A) = \inf\Bigl\{\sum_{j=1}^{\infty}|P_j|\colon\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Bigr\},$$

где inf берется по всем покрывающим A конечным или счетным наборам параллелепипедов P_j вида $P_j = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ и $|P_j|$ — объем P_j, инвариантна относительно сдвигов и ортогональных преобразований.

7.8.4. Доказать, что мера Хаусдорфа H^α не меняется при сдвигах и ортогональных преобразованиях.

7.8.5. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ липшицево с постоянной L. Доказать, что

$$H^\alpha(f(A)) \leqslant L^\alpha H^\alpha(A).$$

7.8.6. Доказать, что мера Хаусдорфа H^n пропорциональна мере Лебега λ_n, используя следующий факт (см. [**1**, с. 264]): среди множеств фиксированного диаметра наибольшим объемом обладает шар.

7.8.7. Доказать, что длина гладкой кривой на плоскости совпадает с ее внешней мерой Хаусдорфа порядка 1.

Указание: при оценке длины через одномерную меру Хаусдорфа воспользоваться тем, что для всякого $q > 1$ можно разбить гладкую кривую на участки, длины которых будут не более чем в q раз больше расстояний между концевыми точками.

7.8.8. Доказать, что поверхностная мера на сфере с центром в нуле инвариантна относительно ортогональных преобразований.

7.8.9. Доказать, что для всякой непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\|x\|\leqslant R} f(x)\,dx = \int_0^R \int_{\|x\|=r} f(x)\,\lambda_{n-1}(dx)\,dr,$$

где λ_{n-1} — поверхностная мера на сфере.

7.8.10. Доказать, что интеграл от непрерывной функции f на $\mathbb{R}^n$ по поверхностной мере на единичной сфере равен пределу при $\varepsilon \to 0$ объемных интегралов от $\varepsilon^{-1} f$ по множествам $\{x\colon\ 1 \leqslant \|x\| \leqslant 1+\varepsilon\}$.

7.8.11. Пусть гладкая функция f на $\mathbb{R}^3$ гармонична, т. е.

$$\Delta f := \partial_{x_1}^2 f + \partial_{x_2}^2 f + \partial_{x_3}^2 f = 0.$$

Выразив объемный интеграл от f по $\{x\colon\ r \leqslant \|x\| \leqslant R\}$ через поверхностный, доказать, что для всякого x и всякой сферы $S(x,R)$ радиуса R с центром в x верно равенство

$$f(x) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S(x,R)} f(y)\,\lambda_2(dy),$$

где λ_2 — поверхностная мера на сфере.

Указание: использовать пример 7.6.3, в котором надо заметить, что в случае шара радиуса $r \leqslant R$ с центром в нуле внешняя нормаль к границе имеет вид $\mathrm{n}(x) = x/r$, поэтому $\langle \nabla u(x), \mathrm{n}(x)\rangle = r^{-1}\langle \nabla u(x), x\rangle$; записав x как $x = rs$, где s — единичный вектор, вычислить интеграл от $\langle \nabla u(rs), s\rangle$ по r по отрезку $[0,R]$ и записать интеграл от u по шару в сферических координатах.

7.8.12. Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Доказать формулу Пуассона

$$\int_{\|x\|=1} f(ax_1 + bx_2 + cx_3)\,d\sigma_2 = 2\pi \int_{-1}^{1} f\bigl(t\sqrt{a^2+b^2+c^2}\bigr)\,dt,$$

где σ_2 — поверхностная мера.

7.8.13. Пусть поверхность $S\subset\mathbb{R}^3$ задана уравнением $F(x,y,z)=0$, где функция F непрерывно дифференцируема, причем S взаимно однозначно проектируется на область D в плоскости переменных (x,y), измеримую по Жордану. Доказать, что

$$\lambda_2(S) = \int_U \frac{|\nabla F(x,y,z(x,y))|}{|\partial_z F(x,y,z(x,y))|}\,dx\,dy,$$

где $z(x,y)$ задается тождеством $F(x,y,z(x,y)) = 0$ в D.

7.8.14. Для гладких форм ω_1 и ω_2 доказать тождество

$$d(\omega_1\wedge\omega_2) = d\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^{\mathrm{deg}\omega_1} omega_1 \wedge d\omega_2.$$

7.8.15. Вычислить площадь поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной условиями $x^2+y^2\leqslant 1$, $z = xy$.

7.8.16. Вычислить $df_1\wedge df_2\wedge df_3$, где f_1, f_2, f_3 — гладкие функции на $\mathbb{R}^3$.

7.8.17. Найти интеграл от дифференциала дифференциальной 1-формы

$$x_2x_3dx_1 + x_1dx_2 + dx_3$$

по единичной сфере с центром в нуле в $\mathbb{R}^3$.

7.8.18. Вычислить интеграл

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

по кривой $\gamma = \{(x, y)\colon\ y = x^2,\ x \in [-1, 1]\}$ (ориентированной в соответствии с возрастанием x).

7.8.19. Найти интеграл от 2-формы $xdydz + ydzdx + zdxdy$ по единичной сфере с центром в нуле.

7.8.20. Найти интеграл от 2-формы $x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ по единичной сфере с центром в нуле.

7.8.21. Найти интеграл от 1-формы $ydx + zdy + xdz$ по окружности, полученной в пересечении единичной сферы с центром в нуле и плоскости $x + y + z = 0$ (используя естественную ориентацию этой окружности как границы круга).

7.8.22. Для гладкой функции f и гладкого векторного поля F на $\mathbb{R}^3$ доказать формулу

$$\mathrm{rot}\,(fF) = f\mathrm{rot}\,F + [\nabla f, F],$$

где $[u, v]$ обозначает векторное произведение.

7.8.23. Пусть F — непрерывно дифференцируемое векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что его ротор вычисляется по формуле

$$\mathrm{rot}\,F(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x-y|=\varepsilon} [F(y), \mathrm{n}(y)]\, \lambda_2(dy),$$

где $[u, v]$ — векторное произведение, $\mathrm{n}(y)$ — единичная внешняя нормаль в y к сфере радиуса ε с центром в x.

7.8.24. Найти интеграл

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

где γ — замкнутая ломаная без самопересечений, причем начало координат лежит внутри ограниченного этой ломаной многоугольника.

7.8.25. Выяснить, является ли 2-форма

$$x_3dx_1 \wedge dx_2 - x_2dx_1 \wedge dx_3 + x_1dx_2 \wedge dx_3$$

ненулевой формой на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$. Рассмотреть аналогичную форму в $\mathbb{R}^n$.

Глава 8

Интегралы, зависящие от параметра

В этой главе приведены условия непрерывности и дифференцируемости по параметру для обычных и несобственных интегралов. Кроме того, здесь обсуждаются так называемые Γ- и B-функции Эйлера. Речь идет о выражениях вида

$$\int f(x, \alpha)\, dx,$$

в которых функция $f(x, \alpha)$ двух переменных интегрируема (в собственном или несобственном смысле) по x, что после интегрирования дает функцию аргумента α. Возникают вопросы о ее непрерывности и дифференцируемости. Весьма важные для приложений функций такого вида возникают при использовании довольно элементарных на первый взгляд функций типа $x^\gamma e^{-x}$ или $x^\beta (1-x)^\gamma$.

§ 8.1. Непрерывность интеграла по параметру

В основе достаточных условий непрерывности интеграла, зависящего от параметра, лежат условия перехода к пределу под знаком интеграла. Напомним, что имеется самая базовая теорема, в которой интегрируемые функции f_n на отрезке или кубе K сходятся равномерно к функции f, т. е.

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что дает интегрируемость функции f и равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n(x)\, dx = \int_K f(x)\, dx. \tag{8.1.4}$$

Значительно более общей является теорема Лебега, в которой дана лишь поточечная сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ при каждом фиксированном x без какой-либо равномерности, но дополнительно требуется наличие интегрируемой мажоранты, т. е. интегрируемой (по Риману или Лебегу в зависимости от ситуации) функции Φ, для которой

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, n, x.$$

При этих условиях функция f интегрируема по Лебегу (в случае римановского интеграла это необходимо дополнительно требовать), причем верно равенство (8.1.4). Наличие интегрируемой мажоранты в буквальном смысле не является необходимым условием (нетрудно привести пример, когда функция $\sup_n f_n(x)$ неинтегрируема, но (8.1.4) верно), однако для неотрицательных функций оно почти необходимо в следующем смысле: если $f_n \geqslant 0$, $f_n(x) \to f(x)$ и (8.1.4) верно, то найдется подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой есть интегрируемая мажоранта (а именно: функция $\sup_k f_{n_k}(x)$ интегрируема). Теорема Лебега доказывается несложно после развития некоторой техники теории меры и интеграла Лебега, но непосредственно она доказывается трудно даже в такой элементарной ситуации: многочлены f_n сходятся к нулю в каждой точке (неравномерно), причем $|f_n(x)| \leqslant 1$. Тогда интегралы от f_n сходятся к нулю, но это отнюдь не очевидно (см. прямое обоснование в Фихтенгольц [**21**, п. 526]). Знать теорему Лебега очень полезно.

Указанные условия сразу приводят к следующему заключению. Пусть K — куб в $\mathbb{R}^d$.

8.1.1. Предложение. *Пусть функция* $f\colon\ K\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *интегрируема по первому переменному при фиксированном втором и непрерывна по второму при фиксированном первом. Тогда для непрерывности функции*

$$\alpha \mapsto \int_K f(x,\alpha)\,dx$$

достаточно выполнения какого-либо из следующих условий:

(i) *функция* f *непрерывна на* $K\times[c,d]\to\mathbb{R}$;

(ii) *непрерывность по* α *равномерна по* x, *т. е. при* $\alpha_n\to\alpha$ *имеем* $\lim\limits_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|f(x,\alpha_n)-f(x,\alpha)|=0$;

(ii) *существует такая интегрируемая на* K *функция* Φ, *что*

$$|f(x,\alpha)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, x\in K, \alpha\in[c,d].$$

Условие Лебега по своей сути ориентировано на абсолютные интегралы, поэтому оно не всегда помогает в случае несобственных интегралов, которым вообще противопоказаны оценки с модулями. Для них вводится некоторое новое техническое условие, более слабое, чем наличие интегрируемой мажоранты (но и не говорящее что-либо про интегралы от модулей).

8.1.2. Определение. *Пусть дано семейство* $f(\cdot, \alpha)$ *функций на промежутке* $[a, +\infty)$, *интегрируемых на всяком отрезке* $[a, R]$ *и несобственно интегрируемых на* $[a, +\infty)$. *Говорят, что эти функции имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $R > a$, *что*

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon \quad \forall\, \alpha$$

при всех $R_1, R_2 \geqslant R$.

Аналогично вводится равномерная сходимость несобственных интегралов в случае особенности в a, *т. е. когда собственная интегрируемость дана на отрезках в* $(a, +\infty)$.

Простое достаточное (но отнюдь не необходимое) условие равномерной сходимости несобственных интегралов состоит в наличии интегрируемой (несобственно) на $(0, +\infty)$ функции Φ, для которой

$$|f(x, \alpha)| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, x \in (0, +\infty),\ \forall\, \alpha.$$

Полезные широкие достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов даны в следующем параграфе. В приводимой ниже теореме это понятие применяется в достаточном условии непрерывности по параметру несобственного интеграла.

8.1.3. Теорема. *Пусть функция* $f\colon\ [a, +\infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *непрерывна и несобственно интегрируема по первому аргументу на промежутке* $[a, +\infty)$. *Тогда для непрерывности функции*

$$\alpha \mapsto \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

достаточно равномерной сходимости несобственных интегралов от функций $f(\cdot, \alpha)$.

Аналогичное утверждение верно в случае особенности в a (*тогда требуется лишь непрерывность на* $(a, +\infty) \times [c, d]$).

Доказательство. Пусть $\alpha_n \to \alpha_0$ и $\varepsilon > 0$. По условию равномерной сходимости интегралов найдется такое $R > a$, что

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon \quad \forall\, \alpha$$

при всех $R_1, R_2 \geqslant R$. Это дает оценку

$$\left|\int_R^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \quad \forall\,\alpha.$$

Применяя теорему для обычных интегралов по $[a,R]$, находим такое N, что при $n \geqslant N$ интегралы от $f(x,\alpha_0)$ и $f(x,\alpha_n)$ по $[a,R]$ отличаются не больше, чем на ε. В итоге несобственные интегралы по $[a,+\infty)$ отличаются не больше, чем на 2ε.

Случай особой точки в a аналогичен, надо лишь заменить $[a,R]$ на $[r,R]$ с $r > a$ и устроить еще один предельный переход при $r \to a$. $\square$

Вместо непрерывности f по двум переменным достаточно иметь непрерывность по α, равномерную по x из каждого отрезка. Это ясно из доказательства.

8.1.4. Следствие. *Заключение предыдущей теоремы верно, если функция f непрерывна по двум переменным и $|f(x,\alpha)| \leqslant \Phi(x)$, где функция Φ несобственно интегрируема на $[a,+\infty)$.*

Несколько более тонкие признаки непрерывности приведены в следующем параграфе.

Разумеется, не всегда интеграл от непрерывно зависящей от параметра функции будет непрерывен по параметру. Например, интеграл от функции $\alpha e^{-\alpha x}$ по $[0,+\infty)$ равен 1 при $\alpha \in (0,1]$, но при $\alpha = 0$ интеграл обращается в нуль.

§ 8.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Для сходимости неабсолютных несобственных интегралов полезным достаточным условием является условие Абеля – Дирихле. Оно предлагает представить рассматриваемую функцию на $[a,+\infty)$ в виде $f(x)g(x)$, где функция f непрерывна, функция $g \geqslant 0$ ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонно убывает. Тогда для

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$$

мы получаем

$$\int_s^t f(x)g(x)\,dx = \int_s^t F'(x)g(x)\,dx = Fg|_s^t - \int_s^t F(x)g'(x)\,dx, \quad (8.2.5)$$

где

$$\left|\int_s^t F(x)g'(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in[s,t]} |F(x)| \int_s^t |g'(x)|\,dx$$
$$= \sup_{x\in[s,t]} |F(x)|\,|g(s)-g(t)|. \qquad (8.2.6)$$

Это представление дает следующие достаточные условия стремления к нулю интеграла в левой части (8.2.5) при $s,t\to+\infty$:

(i) существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, т. е. f имеет несобственный интеграл;

(ii) $\sup_x |F(x) < \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Это же представление можно использовать для вывода условий равномерной сходимости интегралов.

8.2.1. Теорема. *Пусть при всех $\alpha\in A$ функции $x\mapsto f(x,\alpha)$ непрерывны на $[a,+\infty)$, функции $x\mapsto g(x,\alpha)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,+\infty)$, неотрицательны и монотонно убывают. Для равномерной сходимости несобственных интегралов*

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$$

достаточно выполнения какого-либо из следующих двух условий:

(i) $\sup_{x,\alpha}|g(x,\alpha)|<\infty$ *и функции $f(x,\alpha)$ имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы, т. е. функции*

$$F(x,\alpha) := \int_a^x f(y,\alpha)\,dy$$

равномерно по α стремятся к соответствующим несобственным интегралам при $x\to\infty$;

(ii) $\sup_{x,\alpha}|F(x,\alpha)|<\infty$ *и функции $x\mapsto g(x,\alpha)$ равномерно сходятся к нулю при $x\to+\infty$, т. е.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup_{\alpha\in A}|g(x,\alpha)|=0$.

Доказательство. В случае (i) интеграл от $f(x,\alpha)g(x,\alpha)$ по $[s,t]$ оцениваем с помощью (8.2.5) и (8.2.6) следующим образом: для данного $\varepsilon>0$ находим $R>a$ такое, что $|F(x,\alpha)|<\varepsilon$ для всех α при $x\geqslant R$, что позволяет оценить интеграл от $f(x,\alpha)g(x,\alpha)$ по $[s,t]$ при $s,t\geqslant R$ через $4\varepsilon\sup_{x,\alpha}|g(x,\alpha)|$.

В случае (ii) находим такое $R\geqslant a$, что $|g(x,\alpha)|\leqslant\varepsilon$ для всех α при $x\geqslant R$, что с помощью (8.2.5) и (8.2.6) позволяет оценить этот же интеграл через $4\varepsilon\sup_{x,\alpha}|F(x,\alpha)|$. $\square$

На самом деле обе теоремы верны при несколько более широких условиях: вместо непрерывности функции f по x достаточно интегрируемости, а от функции g можно не требовать дифференцируемость по x (достаточно монотонного убывания). Доказательство с прежней идеей при этих условиях лишь немного усложняется, а именно надо либо доказывать формулу интегрирования по частям при указанных более широких условиях (тогда вместо производной g появятся интегралы Стилтьеса), либо использовать теорему о среднем, см. Зорич [**8**].

8.2.2. Пример. Несобственные интегралы

$$\int_0^\infty g(x,\alpha)\sin x\,dx$$

сходятся равномерно, если функции $x \mapsto g(x,\alpha)$ убывают, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup_\alpha g(x,\alpha) = 0$. Здесь важно то, что функция $\cos x$ равномерно ограничена. Напомним, что даже для простейших функций типа $g(x,\alpha) = x^{-1}$ или $g(x,\alpha) = x^{-1/2}$ абсолютной сходимости интегралов нет, так что здесь нельзя проверить что-то с помощью мажорант. Правда, прием, использованный в признаке Абеля – Дирихле, фактически сводится к тому, что интегрирование по частям приводит к ситуации, где уже есть интегрируемые мажоранты.

Из доказанной теоремы сразу получаем соответствующее условие непрерывности интеграла по параметру α: достаточно добавить условие непрерывности обеих функций по двум переменным.

§ 8.3. Дифференцируемость интеграла по параметру

Дифференцируемость интеграла по параметру исследуется с помощью тех же соображений, что и непрерывность. Сначала рассмотрим обычные интегралы. Пусть K — куб в $\mathbb{R}^d$.

8.3.1. Теорема. *Пусть функция $f\colon K\times(c,d)\to\mathbb{R}$ интегрируема по первому аргументу при фиксированном втором и дифференцируема по второму аргументу при фиксированном первом. Для дифференцируемости интеграла от $f(x,\alpha)$ по K по параметру и равенства*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_K f(x,\alpha)\,dx = \int_K \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx \qquad (8.3.7)$$

достаточно выполнение какого-либо из следующих условий:

(i) *функция $\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$ непрерывна на $K\times(c,d)$*;

(ii) *существует интегрируемая на K функция Φ, для которой*

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right| \leqslant \Phi(x) \quad \forall\, x \in K, \forall\, \alpha \in (c,d).$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно из того, что отношение

$$\frac{f(x,\alpha+h_n)-f(x,\alpha)}{h_n}$$

в силу теоремы о среднем равно $\partial f(x,\theta(x,\alpha,h_n))/\partial\alpha$ для некоторой точки $\theta(x,\alpha,h_n)$ из $[\alpha,\alpha+h_n]$ (или $[\alpha+h_n,\alpha]$, если $h_n<0$), причем ввиду равномерной непрерывности функции $\partial f/\partial\alpha$ на $K\times[c',d']$ для фиксированного $[c',d']\subset(c,d)$ мы имеем равномерную сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|\partial f(x,\theta(x,\alpha,h_n))/\partial\alpha-\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha|=0$.

Второе утверждение выводится из теоремы Лебега о мажорированной сходимости с учетом того, что

$$|f(x,\alpha+h_n)-f(x,\alpha)|/|h_n| = |\partial f(x,\theta(x,\alpha,h_n))/\partial\alpha| \leqslant \Phi(x),$$

причем при $h_n\to 0$ отношение $(f(x,\alpha+h_n)-f(x,\alpha))/h_n$ стремится к $\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$ при каждом фиксированном x. □

Для дифференцируемости несобственных интегралов опять подходящим условием оказывается равномерная сходимость несобственных интегралов.

8.3.2. Теорема. *Пусть функция f на $[a,+\infty)\times(c,d)$ дифференцируема по второму аргументу, функция $\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$ непрерывна, при некотором α_0 функция $x\mapsto f(x,\alpha_0)$ несобственно интегрируема на $[a,+\infty)$, а функции $x\mapsto\partial f(x,\alpha)/\partial\alpha$ имеют равномерно сходящиеся несобственные интегралы по $[a,+\infty)$. Тогда функции $\alpha\mapsto f(x,\alpha)$ несобственно интегрируемы при всех $\alpha\in(c,d)$, причем*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Аналогичное верно в случае особенности в точке a.

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta$$

при $\alpha>\alpha_0$ и аналогично при $\alpha<\alpha_0$. Проинтегрируем это равенство по x по $[a,R]$ и с помощью теоремы Фубини (для непрерывных функций) запишем правую часть в виде

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_a^R \frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,dx\,d\beta.$$

Условие теоремы говорит, что внутренние интегралы в правой части при $R\to\infty$ равномерно стремятся к несобственным интегралам по $[a,+\infty)$ от производной f по второму аргументу. По теореме о предельном переходе в обычном интеграле получаем существование несобственного интеграла от $f(x,\alpha)$ и равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,dx\,d\beta,$$

причем функция

$$\beta\mapsto\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta}\,dx$$

непрерывна в силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Следовательно, несобственный интеграл от $f(x,\alpha)$ оказывается непрерывно дифференцируемым, причем выполнено указанное равенство. $\square$

§ 8.4. Эйлеровы интегралы

Это параграф посвящен параметрическим интегралам специального вида, так называемым Γ-функции («гамма-функция») и B-функции («бета-функция») Эйлера. Они задаются формулами

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \tag{8.4.8}$$

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx. \tag{8.4.9}$$

Эти почти что школьного вида специальные функции встречаются в столь многих областях математики и столь разнообразных приложениях, что давно вошли в курс высшей математики в виде самостоятельного раздела.

Несколько странные на первый взгляд выражения степеней (с минус единицами) продиктованы на самом деле заботой о более простом виде области задания этих функций. Ясно, что гамма-функция задана при $\alpha>0$ (при $\alpha\leqslant 0$ возникает неинтегрируемая особенность в нуле), бета-функция задана при $\alpha>0,\beta>0$. При этом для $\alpha<1$ даже в нуле интеграл несобственный (впрочем, если его рассматривать как лебеговский, то ничего особенного в нем нет), для бета-функции несобственные интегралы (хотя и абсолютно сходящиеся) возникают при $\alpha < 1, \beta < 1$.

С помощью теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру (или теоремы о дифференцировании лебеговского интеграла по параметру) заключаем, что функция Γ бесконечно дифференцируема и

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

В самом деле, ввиду равенства $x^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1)\ln x)$ производная порядка n подынтегральной функции по α имеет вид $x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}$. Если α лежит в отрезке в $(0, +\infty)$, то при каждом фиксированном n данное семейство функций имеет интегрируемую мажоранту вида $(x^\gamma + x^k)e^{-x}$ с некоторыми $\gamma > -1$ и $k > 1$, ибо для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $C > 0$, что $|\ln x| \leqslant Cx^\varepsilon$ при всех $x \in (0, 1)$.

Заметим, что функция Γ' обращается в нуль в единственной точке $\alpha_0 > 1$, причем $\Gamma'' > 0$, откуда следует выпуклость Γ на $(0, +\infty)$, убывание на $(0, \alpha_0]$ и возрастание на $[\alpha_0, +\infty)$.

8.4.1. Предложение. *При $\alpha > 0$ имеет место формула понижения*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{8.4.10}$$

Кроме того,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям с $e^{-x} = -(e^{-x})'$, находим

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,$$

ибо подстановка значений $x^\alpha e^{-x}$ на концах дает нуль. Далее, непосредственное вычисление дает $\Gamma(1) = 1$, откуда при $n \in \mathbb{N}$ получаем равенство $\Gamma(n+1) = n!$. $\square$

Таким образом, функция Γ дает продолжение факториала на положительные числа. Но теперь мы можем пойти и дальше, продолжив гамму-функцию на всю ось без точек $0, -1, -2, \ldots$, а именно: положим

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \quad \alpha \in (-1, 0),$$

затем повторим этот прием. Можно также сразу доопределить Γ на $(-k, -k+1)$ по формуле

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)}.$$

На самом деле функцию Γ можно продолжать и в комплексную область, но мы не будем этим заниматься.

При некоторых дробных α значения гамма-функции вычисляются. Например, заменой $x = y^2$ получаем

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x}\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi},$$

где мы воспользовались известным из раздела о кратных интегралах значением для интеграла от e^{-y^2}. Теперь при всех натуральных n можно найти $\Gamma(n+1/2)$ по формуле понижения.

Приведем без обоснования (которое можно найти в трактатах Зорич [**8**, гл. XVII] или Фихтенгольц [**21**, гл. 14]) такие факты:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)},$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При $\alpha \to +\infty$ верна асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(\alpha+1) \sim \sqrt{2\pi\alpha}\Big(\frac{\alpha}{e}\Big)^{\alpha},$$

дающая при натуральных α полезную асимптотику для факториала:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^{n}.$$

Известна и более точная формула (см. Фихтенгольц [**21**, т. II, с. 792])

$$\ln\Gamma(\alpha) = \ln\sqrt{2\pi} + \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)\ln\alpha - \alpha + \frac{\theta(\alpha)}{12}, \quad \theta(\alpha) \in (0,1).$$

Отметим еще, что гамма-функция Γ логарифмически выпукла на луче $(0, +\infty)$, т. е. выпукла функция $\ln\Gamma$ (причем верно неравенство $(\ln\Gamma)'' > 0$, см. задачу 8.5.10). Оказывается, что функциональное уравнение (8.4.10) вместе с логарифмической выпуклостью полностью характеризует гамма-функцию. Обоснование следующей теоремы можно прочитать в Дороговцев [**6**, с. 418] или Фихтенгольц [**21**, п. 533].

8.4.2. Теорема. *Пусть функция* $g\colon\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *удовлетворяет уравнению* $g(\alpha+1)=\alpha g(\alpha)$, $g(1)=1$, *причем функция* $\ln g$ *выпукла. Тогда* $g=\Gamma$.

Приведем также некоторые соотношения для бета-функции.

8.4.3. Предложение. *Справедливы равенства*

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha), \tag{8.4.11}$$

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy, \tag{8.4.12}$$

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta+1)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\,B(\alpha-1,\beta). \tag{8.4.13}$$

Доказательство. Формула (8.4.11) получается очевидной заменой $x=1-y$. Формула (8.4.12) получается непосредственно из определения заменой $x=y/(y+1)$, при которой $dx=-(y+1)^{-2}dy$. Из нее можно получить (8.4.13) интегрированием по частям, если рассмотреть $(1+y)^{-\alpha-\beta}=(1-\alpha-\beta)\bigl((1+y)^{-\alpha-\beta+1}\bigr)'$. Однако возможна проверка и по исходной формуле. При $\alpha>1$ интегрированием по частям, записав функцию $(1-x)^{\beta-1}$ как $-(\beta^{-1}(1-x)^{\beta})'$, находим

$$\begin{aligned}
B(\alpha,\beta)&=-\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1+\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx=\\
&=\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx=\\
&=\frac{\alpha-1}{\beta}\left(\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx-\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\right)=\\
&=\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta)+\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta),
\end{aligned}$$

что дает (8.4.13). □

С помощью доказанных формул можно осуществлять продолжение B-функции аналогично Γ-функции.

Связь между бета-функцией и гамма-функцией дается следующей формулой.

8.4.4. Предложение. *Справедливо равенство*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{8.4.14}$$

Доказательство. Будем использовать представление (8.4.12) для бета-функции. При этом заметим, что при каждом фиксированном значении $y>0$ верно равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=y^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx,$$

получаемое заменой переменной $t=(1+y)x$. Проинтегрируем это равенство по y по $[0,+\infty)$. Слева получим $\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$. Справа получим

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}&y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\,dy=\\&=\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy\,dx=\\&=\int_0^{+\infty}\Bigl(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}x\,dy\Bigr)\,dx=\\&=\int_0^{+\infty}\Bigl(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt\Bigr)\,dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta),\end{aligned}$$

где перестановки интегралов законны в силу их абсолютной сходимости. □

8.4.5. Пример. Справедливо равенство

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^m(\cos x)^n\,dx=\frac{1}{2}B\Bigl(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\Bigr).$$

Обоснование состоит в замене переменной $\sin x=\sqrt{t}$.

8.4.6. Пример. Равенства

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx=\frac{1}{n}B\Bigl(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}\Bigr)=\frac{1}{n}\Gamma\Bigl(1-\frac{m}{n}\Bigr)\Gamma\Bigl(\frac{m}{n}\Bigr)=\\=\frac{\pi}{n\sin(\pi m/n)}$$

при $0<m<n$ проверяется с помощью замены $x=t^{1/n}$.

8.4.7. Пример. Обозначим через V_n объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда объем шара радиуса R равен V_nR^n. Вычисляя V_n с помощью теоремы Фубини и замечая, что при фиксированном значении $x_n\in[-1,1]$ множество $\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\colon\ x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2=1-x_n^2\}$ является

$(n-1)$-мерным шаром радиуса $(1-x_n^2)^{1/2}$, получаем рекуррентное соотношение

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}\,dx_n = 2V_{n-1}\int_0^1(1-t^2)^{(n-1)/2}\,dt = \\
&= V_{n-1}\int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{(n-1)/2}\,ds = V_{n-1}B(1/2,(n+1)/2) = \\
&= V_{n-1}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+n/2)},
\end{aligned}
$$

откуда с учетом равенства $V_2=\pi$ находим ответ

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

который можно преобразовать с помощью формулы понижения. Надо отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного n, что дает на первый взгляд более «явное» выражение

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad V_{2m+1} = \frac{(2\pi)^{m+1}}{(2m+1)!!},$$

хотя во многих приложениях формула с гамма-функцией оказывается полезней.

§ 8.5. Задачи

8.5.1. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-\alpha x}\,dx, \quad \alpha\in[0,\infty)$$

и выяснить, непрерывен ли он по α.

8.5.2. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$$

сходится равномерно на каждом отрезке в $(0,+\infty)$, но равномерной сходимости нет на $[0,1]$.

8.5.3. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^\alpha}\,dx, \quad \alpha\in[0,+\infty).$$

8.5.4. Исследовать интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \in (2, +\infty)$$

на равномерную сходимость и выяснить, непрерывен ли он по α.

8.5.5. Пусть F — непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$, f и g — непрерывные функции на $[0, 1]$. Доказать непрерывность по $\alpha \in [0, 1]$ интеграла

$$\int_{g(\alpha)}^{f(\alpha)} F(x, \alpha)\,dx$$

8.5.6. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на плоскости. Найти производную функции

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha)\,dx, \quad \alpha \in (0, 1).$$

8.5.7. Пусть f — непрерывная функция на $[0, +\infty)$, несобственно интегрируемая на лучах $[\delta, +\infty)$ при всех $\delta > 0$. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a, b > 0.$$

8.5.8. Вычислить интегралы

$$\text{(i)} \ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx, \quad \text{(ii)} \ \int_0^{+\infty} \Big(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\Big)^2 dx, \quad a, b > 0.$$

Указание: использовать теорему Фруллани, а в (ii) также дифференцирование по α.

8.5.9. Выразить через гамма-функцию

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3 - \cos\theta}}\,.$$

8.5.10. Доказать, что гамма-функция логарифмически выпукла на множестве $(0, +\infty)$, т. е. выпукла функция $\ln\Gamma$, более того, $(\ln\Gamma)'' > 0$.

Указание: записав $(\ln\Gamma)''$ как $\Gamma^{-2}(\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2)$, оценить

$$(\Gamma'(\alpha))^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x\,dx\right)^2$$

через $\Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha)$ с помощью неравенства Коши – Буняковского, представив функцию $e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x$ в виде произведения двух подходящих функций.

Литература

[1] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1. 2-е изд., ИКИ, РХД, Москва – Ижевск, 2006; 584 с.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. ИКИ, Москва – Ижевск, 2004; 496 с.

[3] Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т. 1 – 2. 13-е изд. Т. 3. 4-е изд. ГИФМЛ, М., 1958, 1951; 284 с., 286 с., 268 с. (переиздан в 2003 г., изд. Лань, СПб.).

[4] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, М., 1997; 624 с.

[5] Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. Вища школа, Киев, 1987; 408 с.

[6] Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. 2-е изд. Факт, Киев, 2004; 560 с.

[7] Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. Наука, М., 1977; 88 с.

[8] Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Наука, М., 1981, 1984; 544 с., 640 с.

[9] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Мир, М., 1971; 392 с.

[10] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1 – 3. Дрофа, М., 2003, 2004, 2006; 704 с., 720 с., 351 с.

[11] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1 – 3. 2-е изд. Физматлит, М., 2003; 496 с., 505 с., 473 с.

[12] Львовский С.М. Лекции по математическому анализу. МЦНМО, М., 2008; 296 с.

[13] Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ: кратные и криволинейные интеграла. Справочное пособие по высшей математике (АнтиДемидович). Т. 3. Едиториал УРСС, М., 2001; 224 с.

[14] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. Мир, М., 1971; 232 с.

[15] Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. 3-е изд. Наука, М., 1983; 468 с., 451 с.

[16] Никольский С.М. Курс математического анализа. 6-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2001; 592 с.
[17] Постников М.М. Гладкие многообразия. Наука, М., 1987; 480 с.
[18] Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Ч. II. Кн. 2. Ин-т математики, Новосибирск, 2001; 444 с.
[19] Рудин У. Основы математического анализа. Мир, М., 1976; 320 с.
[20] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Мир, М., 1970; 412 с.
[21] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. 7-е изд. Наука, М., 1970.
[22] Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1–2. Наука, М., 1972; 624 с.
[23] Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Науч. книга, Новосибирск, 2002; 206 с.