ЛИСТОК **2**. Интегрирование дифференциальных форм

Анализ, 2 курс, **11.11.2015**

2◇1 Вычислить площадь поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной условиями $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = xy$.

2◇2 Вычислить $df_1 \wedge df_2 \wedge df_3$, где f_1, f_2, f_3 — гладкие функции на $\mathbb{R}^3$.

2◇3 Найти интеграл от дифференциала дифференциальной 1-формы

$$x_2 x_3 dx_1 + x_1 dx_2 + dx_3$$

по единичной сфере с центром в нуле в $\mathbb{R}^3$.

2◇4 Вычислить интеграл

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

по кривой $\gamma = \{(x, y)\colon\ y = x^2,\ x \in [-1, 1]\}$ (ориентированной в соответствии с возрастанием x).

2◇5 Найти интеграл от 2-формы $xdydz + ydzdx + zdxdy$ по единичной сфере с центром в нуле.

2◇6 Найти интеграл от 2-формы $x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ по единичной сфере с центром в нуле.

2◇7 Найти интеграл от 1-формы $ydx + zdy + xdz$ по окружности, полученной в пересечении единичной сферы с центром в нуле и плоскости $x + y + z = 0$ (используя естественную ориентацию этой окружности как границы круга).

2◇8 Для гладкой функции f и гладкого векторного поля F на $\mathbb{R}^3$ доказать формулу

$$\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + [\nabla f, F],$$

где $[u, v]$ обозначает векторное произведение.

2◇9 Пусть F — непрерывно дифференцируемое векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что его ротор вычисляется по формуле

$$\operatorname{rot} F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x-y|=\varepsilon} [F(y), \mathrm{n}(y)]\, \lambda_2(dy),$$

где $[u, v]$ — векторное произведение, $\mathrm{n}(y)$ — единичная внешняя нормаль в y к сфере радиуса ε с центром в x.

2◇10 Найти интеграл

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

где γ — замкнутая ломаная без самопересечений, причем начало координат лежит внутри ограниченного этой ломаной многоугольника.