

ЛИСТОК 3. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Анализ, 2 курс, 02.12.2015

3♦1 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in [0, \infty)$$

и выяснить, непрерывен ли он по α .

3♦2 Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

сходится равномерно на каждом отрезке в $(0, +\infty)$, но равномерной сходимости нет на $[0, 1]$.

3♦3 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

3♦4 Исследовать интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (2, +\infty)$$

на равномерную сходимость и выяснить, непрерывен ли он по α .

3♦5 Пусть F — непрерывная функция на \mathbb{R}^2 , f и g — непрерывные функции на $[0, 1]$. Доказать, что интеграл

$$\int_{g(\alpha)}^{f(\alpha)} F(x, \alpha) dx$$

непрерывен по $\alpha \in [0, 1]$.

3♦6 Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на плоскости. Найти производную функции

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x + \alpha, x - \alpha) dx, \quad \alpha \in (0, 1).$$

3♦7 Пусть f — непрерывная функция на $[0, +\infty)$, несобственно интегрируемая на лучах $[\delta, +\infty)$ при всех $\delta > 0$. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a, b > 0.$$

3♦8 Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx, \quad a, b > 0.$$

3♦9 Выразить через гамма-функцию

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3 - \cos \theta}}.$$

3♦10 Доказать, что гамма-функция логарифмически выпукла на множестве $(0, +\infty)$, т. е. выпукла функция $\ln \Gamma$, более того, $(\ln \Gamma)'' > 0$.