Семинар 2. Коники на проективной плоскости

1. Определение коники в $\mathbb{P}^2$. Первые свойства коник.

Как и ранее, мы работаем в $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение коники в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим проективное отображение $f : \mathbf{l} \to \mathbf{l}'$, где $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ – две произвольные (не обязательно различные) проективные прямые в двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. Этим проективным прямым в исходной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ соответствуют пучки прямых с центрами $S = \check{\mathbf{l}}$ и $S' = \check{\mathbf{l}}'$, а каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbf{l}$ – прямая $\check{\mathbf{x}}$ (соответственно, каждой точке $\mathbf{x}' \in \mathbf{l}'$ – прямая $\check{\mathbf{x}}'$) в $\mathbb{P}^2$. *Коникой в* $\mathbb{P}^2$ называется множество

$$C = \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{l}} (\check{\mathbf{x}} \cap f(\check{\mathbf{x}})). \tag{1}$$

Другими словами, коника в $\mathbb{P}^2$ – это множество точек пересечения соответственных прямых в двух пучках прямых, между которыми установлено проективное соответствие.

Задача 1. *Покажите, что коника есть кривая в том смысле, что она либо*
1) биективна проективной прямой и проходит через центры S и S' пучков прямых, но не является проективной прямой [1]*, либо*
2) она является проективной прямой или объединением двух проективных прямых.

Указание: В случае, если отображение

$$\mathbf{l} \to C : \quad \mathbf{x} \mapsto \check{\mathbf{x}} \cap f(\check{\mathbf{x}}) \tag{2}$$

корректно определено (т. е. для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{l}$ множество $\check{\mathbf{x}} \cap f(\check{\mathbf{x}})$ есть точка), то C биективна прямой $\mathbf{l}$, проходит через точки S и S', но не совпадает с прмой $\mathrm{Span}(S, S')$. Это случай 1) задачи.

Если же формула (2) не дает корректно определенного отображения, то легко убедиться, что C есть либо объединение двух прямых, либо прямая. Это случай 2) задачи.

Опишите более подробно случай 2) в терминах отображения $f : \mathbf{l} \to \mathbf{l}'$. □

Задача 2. *Докажите, что каждая прямая пересекает данную невырожденную конику не более, чем в двух точках.*

Указание к решению (см. [1, стр. 82]): Пусть, как и выше, C - невырожденная коника, полученная из проективного отображения $f : \mathbf{l} \to \mathbf{l}'$ по формуле (2), и пусть $S = \check{\mathbf{l}}$ и $S' = \check{\mathbf{l}}'$ – центры пучков прямых. Пусть p – произвольная прямая. Для произвольной точки $X \in p$ рассмотрим прямую $\mathbf{x} := \mathrm{Span}(S, X)$ и положим $Y = C \cap \mathbf{x} \setminus \{S\}$ и $X' = \mathrm{Span}(Y, S') \cap p = f(\mathbf{x}) \cap p$. (См. рисунок ниже.) По построению $F : p \to p$, $X \mapsto X'$ – проективное преобразование, неподвижные точки которого являются точками пересечения прямой p с коникой C. Так как проективное преобразование прямой не имеет более двух неподвижных точек, то получаем требуемое утверждение. □

[1] В этом случае коника называется *невырожденной*, и ее определение (1) есть определение по Штейнеру, 1832.

Для произвольных точек A и B в проективном пространстве введем обозначение: $(AB) = (A, B) := \mathrm{Span}(A, B)$.

Задача 3. *Пусть невырожденная коника C получена по Штейнеру из двух проективных пучков прямых с центрами A и B. Возьмем любые 4 различные точки A_1, B_1, X_1 и X на конике C, отличные от A и B. Тогда точки*

$$M = (AX_1) \cap (A_1X), \quad N = (BX_1) \cap (B_1X), \quad P = (AB_1) \cap (BA_1).$$

коллинеарны.

Решение (см. [1, стр. 89-90]). Пусть $f : \overset{\vee}{A} \xrightarrow{\sim} \overset{\vee}{B}$ – проективное отображение, посредством которого строится коника C, так что

$$(BA_1) = f(AA_1), \quad (BB_1) = f(AB_1), \quad (BX_1) = f(AX_1), \quad (BX) = f(AX). \tag{3}$$

Четыре прямые (AA_1), (AX), (AB_1), (AX_1) пучка $\overset{\vee}{A}$ пересекают прямую (A_1X) в точках A_1, X, M, Q, а четыре прямые (BA_1), (BX), (BB_1), (BX_1) пучка $\overset{\vee}{A}$ пересекают прямую (B_1X) в точках R, X, N, Q. Тем самым, проективное отображение f индуцирует проективное $\tilde{f}$: $(A_1X) \xrightarrow{\sim} (B_1X)$ такое, что

$$\tilde{f}(A_1) = R, \quad \tilde{f}(M_1) = N, \quad \tilde{f}(Q) = B_1, \quad \tilde{f}(X) = X$$

(см. рис. ниже). Так как $\tilde{f}(X) = X$, то отображение $\tilde{f}$ является перспективным, а значит, прямые $(A_1R) = (A_1B)$, (MN) и $QB_1 = AB_1$ проходят через одну и ту же точку. Так как прямые $(A_1R) = (A_1B)$ и $QB_1 = AB_1$ пересекаются в точке P, то через эту точку проходит и прямая (MN). □

Задача 4. *Пусть невырожденная коника C получена по Штейнеру из двух проективных пучков прямых с центрами A и B. Возьмем любые две различные точки A_1, B_1 на конике C, отличные от A и B. Тогда коника C может быть получена по Штейнеру из двух проективных пучков прямых с центрами A_1 и B_1.*

Решение (см. [1, стр. 90-91]). Пусть X и X_1 – еще две точки на C, отличные от предыдущих. Введем предыдущие обозначения (3) для точек M, N и P. (См. рис. ниже.) Пусть точка X становится переменной точкой на кривой C. Тогда точка M будет двигаться по неподвижной прямой AX_1, а точка N – по неподвижной прямой BX_1, причем прямая (MN)

будет описывать пучок с центром в точке P. Тем самым, точки M и N связаны песпективным соответствием между прямыми AX_1 и BX_1. А потому прямые $(A_1M) = (A_1X)$ и $(B_1N) = (B_1X)$ образуют два проективных пучка с центрами A_1 и B_1, что и требовалось. $\square$

Следствие 1. *1) Невырожденная коника C определяется однозначно пятью своими точками.*
2) Через любые 5 точек, никакие 3 из которых не коллинеарны, проходит единственная, притом невырожденная, коника в $\mathbb{P}^2$.

Указание к решению: воспользоваться задачами 3 и 4.

Следствие 2 (теорема Паскаля). *Во всяком 6-угольнике, вписанном в невырожденную конику, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой (называемой прямой Паскаля).*
Замечание. Для данного 6-угольника можно построить 60 прямых Паскаля.

2. Полюсы и поляры для невырожденных коник.

Пусть C – невырожденная коника, и O – произвольная точка вне C. Проведем три произвольные прямые l, m, n через точку O, пересекающие конику C в точках X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 соответственно, как показано на рисунке ниже. Тогда по теореме Дезарга точки

$$S = (Y_1Z_1) \cap (YZ), \quad S' = (XZ_1) \cap (X_1Z), \quad S'' = (XY_1) \cap (X_1Y),$$

лежат на одной прямой, которую мы обозначим через $\mathbf{p}_O$.

Задача 5. *1. Прямая $\mathbf{p}_O$ не зависит от выбора вписанных в конику C перспективных треугольников XY_1Z_1 и X_1YZ, для которых она является осью Дезарга. Она называется* **полярой точки O относительно коники C**.
2. *Для любой прямой l через точку O, пересекающей конику C в точках X и X_1, четверка точек X, X_1, A, O, где $A = \mathbf{p}_O \cap l$, является гармонической.*

Решение (см. [1, стр. 90-91]). Рассмотрим точки

$$M = (XY) \cap (X_1Y_1), \quad N = (XZ) \cap (X_1Z_1), \quad P = (YZ_1) \cap (Y_1Z). \tag{4}$$

Сопоставляя тройке точек X, Y, Z тройку X_1, Y_1, Z_1, по теореме Паскаля получим, что точки

$$S' = (XZ_1) \cap (X_1Z), \quad S'' = (XY_1) \cap (X_1Y), \quad P = (YZ_1) \cap (Y_1Z) \tag{5}$$

коллинеарны. Аналогично, сопоставляя тройке точек X, Y_1, Z тройку X_1, Y, Z_1, по теореме Паскаля получим, что точки

$$S = (YZ) \cap (Y_1Z_1), \quad S' = (XZ_1) \cap (X_1Z), \quad M = (XY) \cap (X_1Y_1) \tag{6}$$

коллинеарны. Соответственно, сопоставляя тройке точек X, Y, Z_1 тройку X_1, Y_1, Z, по теореме Паскаля получим, что точки

$$S = (YZ) \cap (Y_1Z_1), \quad S'' = (XY_1) \cap (X_1Y), \quad N = (XZ) \cap (X_1Z_1) \tag{7}$$

коллинеарны. Из (4)-(7) следует, что прямые (MNP) и $(SS'S'') = \mathbf{p}_O$ совпадают.

Теперь гармоничность четверки X, X_1, A, O вытекает из рассмотрения полного 4-вершинника XX_1YY_1. Это дает утверждение 2 задачи. Отсюда вытекает и утверждение 1 задачи. $\square$

Замечание 1. Из определения поляры $\mathbf{p}_O$ и этого рисунка следует, что если $X \in \mathbf{p}_O$, $\{A, B\} = (OA) \cap C$, $\{B, Y\} = (BX) \cap C$, $\{A, Z\} = (AX) \cap C$, то $O \in (YZ)$. Так как Y и Z зависят от X, то будем обозначать это так: $Y = Y(X)$, $Z = Z(X)$. В частности, если $\{A_1, A_2\} = C \cap \mathbf{p}_O$, то беря $X = A_i$, $i = 1, 2$, получаем, что $Y(A_i) = Z(A_i) = A_i$, $i = 1, 2$, то есть прямые (OA_i), $i = 1, 2$, – **касательные к C, проходящие через точку O.**

Определение. Тругольник называется **автополярным**, если каждя его сторона является полярой противоположной вершины.

Левый из последних рисунков показывает, что имеет место

Следствие 1. *Точки пересечения диагоналей вписанного в невырожденную конику C 4-вершинника образуют автополярный относительно C треугольник.*

На этои рисунке в конику C вписан 4-вершинник $ABDE$, а PQR – автополярный треугольник.

Далее, из предыдущего замечания получаем

Следствие 2. *Точка O содержится в своей поляре $\mathbf{p}_O$ относительно коники C тогда и только тогда, когда она лежит на C, так что:*

$$C = \{X \in \mathbb{P}^2 \mid X \in \mathbf{p}_X\}.$$

При этом для любой точки $X \in C$ поляра $\mathbf{p}_X$ – касательная к C в точке X. И наоборот, если l – касательная к C в точке X, то $l = \mathbf{p}_X$.

Из утверждения 2 задачи 5 получаем

Следствие 3. *Если точка Y лежит на поляре точки X, то и точка X лежит на поляре точки Y, и наоборот:*

$$Y \in \mathbf{p}_X \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathbf{p}_Y. \tag{8}$$

Определение. *Точки X и Y в $\mathbb{P}^2$ называются* **сопряженными относительно коники** C, если *они удовлетворяют одному из двух равносильных условий (8).*

Из следствий 1 и 2 вытекает

Следствие 4. *Если прямая l не является касательной к конике C и точка $X \in l$ не лежит на C, то точка $Y = \mathbf{p}_X \cap l$ отлична от точки X, а точка $O = \mathbf{p}_X \cap \mathbf{p}_Y$ не лежит на прямой l. При этом согласно утверждению 2 задачи 5 пара точек пересечения прямой $\mathbf{p}_X$ (соответственно, прямой $\mathbf{p}_Y$) с коникой C гармонически делит пару точек O, Y (соответственно, пару точек O, X). Тем самым, прямая l является полярой точки O относительно коники C:*

$$l = \mathbf{p}_O.$$

При этом точка O определена по прямой l однозначно. Она называется **полюсом прямой** l **относительно коники** C. *Если прямая l – касательная к C в точке X, то полюсом прямой l относительно C назовем точку X. Таким образом, получаем биекцию*

$$p : \ \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sim} \overset{\vee}{\mathbb{P}^2} : \ X \mapsto \mathbf{p}_X, \tag{9}$$

называемую **поляритетом, задаваемым коникой** C.

Замечание 2. *а) Из задачи 4 следует, что для невырожденной коники C корректно определено понятие гармонической четверки точек: четверка точек A, B, C, D на конике C называется* **гармонической**, *если для любой точки $X \in C$ четверка прямых $(XA), (XB), (XC), (XD)$ является гармонической. (Аналогично для произвольной четверки точек A, B, C, D на конике C определяется их двойное отношение как двойное отношение четверки прямых $(XA), (XB), (XC), (XD)$.)*
б) Отсюда вытекает, что множество всех пар точек C, D на конике C, гармонически делящих пару точек A, B высекается на C пучком прямых с центром в полюсе X прямой (AB).

(В самом деле, рассмотрим прямую $l = (CD)$ пучка через точку X, и пусть $Y = (AB) \cap (CD)$. Тогда согласно предыдущему следствию пара прямых $(AX), (AY) = (AB)$ гармонически делит пару прямых $(AC), (AD)$, а значит, и четверка точек A, B, C, D – гармоническая.)

Задача 6. *Поляритет p, определенный в (9), является проективным отображением в следующем смысле: для произвольной прямой l в $\mathbb{P}^2$ отображение*

$$p: \ l \to p(l)$$

является проективным.

Доказательство. Для простоты возьмем общую прямую l в $\mathbb{P}^2$, пересекающую конику в двух различных точках A, B. (Над $\mathbb{R}$ эти точки могут оказаться мнимыми, что не влияет на наше рассуждение.) Пусть O – полюс прямой l относительно коники C. Тогда для произвольной точки $X \in l$ ее поляра $\mathbf{p}_X$ согласно утверждению 2 задачи 5 пересекает прямую l в точке Y такой, что пара X, Y гармонически делит пару A, B. Тем самым, отображение $f: \ l \to l, \ X \mapsto Y$ – инволюция (с неподвижными точками A и B), а значит, является проективным отображением. Тем самым, и отображение $p: l \to p(l): \ X \mapsto \mathrm{Span}(O, f(X))$ также является проективным. $\square$

Замечание. *Образ коники C при поляритете, задаваемом этой коникой, есть множество $\overset{\vee}{C}$ касательных к конике C.*

Задача 7. Множество $\overset{\vee}{C}$ *является невырожденной коникой в двойственной плоскости $\overset{\vee}{\mathbb{P}}{}^2$. Она называется* **двойственной коникой к конике** C.

Указание к решению. Покажите, что существуют проективные координаты $[x_0 : x_1 : x_2]$ в $\mathbb{P}^2$, в которых произвольная невырожденная коника C задается уравнением (над полем $\mathbb{C}$) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Покажите, что в двойственных координатах $[u_0 : u_1 : u_2]$ в $\overset{\vee}{\mathbb{P}}{}^2$ поляритет p, определяемый коникой C, задается уравнениями:

$$u_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда следует, что двойственная коника $\overset{\vee}{C}$ имеет в $\overset{\vee}{\mathbb{P}}{}^2$ уравнение $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 0$, а значит, является невырожденной. $\square$

Формулируя для коники $\overset{\vee}{C}$ теорему Паскаля и пользуясь принципом двойственности, получаем

Следствие (теорема Брианшона). *Пусть C – невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$. Тогда прямые, соединяющие противоположные вершины описанного около C шестисторонника, пересекаются в одной точке.*

Задача 8. *Пусть 4 различные прямые a, b, c, d касаются невырожденной коники C в точках A, B, C, D соответственно, и пусть $A_1 = a \cap b, \ B_1 = b \cap C, \ C_1 = c \cap d, \ D_1 = d \cap a$. Тогда прямые AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 пересекаются в одной точке.*

Решение. Представить прямые a и c как предельные положения пар касательных a', a'' и c', c'' к конике C, когда касательные a', a'' совпали с a, а c', c'' совпали с c. Тогда 4-сторонник $abcd$ является предельным положением 6-сторонника $a'a''bc'c''ad$. К последнему 6-стороннику применить теорему Брианшона, и получить, что предельным положением точки пересечения его противоположных сторон будет точка пересечения прямых AC, BD и A_1C_1. Аналогично, через эту же точку как точку пересечения прямых AC и BD пройдет и прямая B_1D_1. $\square$

Задача 9. *На данной невырожденной конике C дана точка X. Пользуясь только линейкой, постройте касательную к C в точке X.*

Решение. Пользуясь утверждением 2 задачи 5 и умением находить четвертую гармоническую точку для трех данных точек, для произвольной точки $Y \notin C$ построим поляру $\mathbf{p}_Y$ точки Y относительно C. Пусть $\{A, B\} = C \cap \mathbf{p}_Y$, и пусть Z – четвертая гармоническая точка для A, B и точки $O = (XY) \cap \mathbf{p}_Y$, так что $O \in \mathbf{p}_Z$. С другой стороны, пользуясь следствием 3 из задачи 5 и тем, что $Z \in \mathbf{p}_Y$, получаем, что $Y \in \mathbf{p}_Z$. Так как $(OY) = l$, то из предыдущего следует, что $l = \mathbf{p}_Y$. Поэтому из замечания к задаче 5 следует, что (XZ) – касательная прямая к C в точке X. $\square$

Обозначение. Для произвольной точки X невырожденной коники C через $\mathcal{P}T_X C$ будем обозначать касательную к C в точке X.

Задача 10. *На данной невырожденной конике C даны 4 различных точки X, Y, Z и W. Докажите, что если точки X, Y и точка $A = \mathcal{P}T_Z C \cap \mathcal{P}T_W C$ коллинеарны, то и точки Z, W и точка $B = \mathcal{P}T_X C \cap \mathcal{P}T_Y C$ также коллинеарны.*

Решение. Так как $A = \mathcal{P}T_Z C \cap \mathcal{P}T_W C$, то $(ZW) = \mathbf{p}_A$ (см. замечание к задаче 5). Аналогично, $B = \mathcal{P}T_X C \cap \mathcal{P}T_Y C$, так что $(XY) = \mathbf{p}_B$. Поэтому по условию задачи $A \in \mathbf{p}_B$. Тем самым, согласно следствию 3 задачи 5 $B \in \mathbf{p}_A = (ZW)$. $\square$

Задача 11. *Пусть a, b, c, d – четыре различных касательных прямых к невырожденной конике C. Пусть l – касательная к C в произвольной точке X, и $A = l \cap a$, $B = l \cap b$, $C = l \cap c$, $D = l \cap d$. Тогда двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от точки X.*

Указание к решению. Воспользуйтесь принципом двойственности и теоремой Штейнера (задача 3). $\square$

Задача 12. *Даны невырожденная коника $\mathcal{C}$, три различные точки A, B, C на $\mathcal{C}$, и пусть a, b, c – касательные прямые к $\mathcal{C}$ в точках A, B, C соответственно. Пусть $C' = a \cap b$, $A' = b \cap c$, $B' = a \cap c$. Тогда прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекаются в одной точке.*

Решение. Рассмотрите предельное положение описанного около C 6-сторонника $aa'bb'cc'$, когда $a' \to a$, $b' \to b$, $c' \to c$, и примените теорему Брианшона. $\square$

Следствие. *а) Даны невырожденная коника $\mathcal{C}$, три различные точки A, B, C на $\mathcal{C}$, и пусть точки A_1, B_1, C_1 на $\mathcal{C}$ таковы, что пара A, A_1 гармонически делит пару B, C, пара B, B_1 гармонически делит пару A, C, и пара C, C_1 гармонически делит пару A, B. Тогда прямые (AA_1), (BB_1) и (CC_1) пересекаются в одной точке.*
б) В условиях утверждения а) рассмотрим точки $A' = \mathcal{P}T_B\mathcal{C} \cap \mathcal{P}T_C\mathcal{C}$, $B' = \mathcal{P}T_A\mathcal{C} \cap \mathcal{P}T_C\mathcal{C}$, $C' = \mathcal{P}T_A\mathcal{C} \cap \mathcal{P}T_B\mathcal{C}$. Тогда прямые (AA'), (BB') и (CC') совпадают соответственно с прямыми (AA_1), (BB_1) и (CC_1) из а) выше.

Решение. Воспользуйтесь задачей 12 и замечанием 2 к задаче 5.

Задача 13. *Пусть C – невырожденная коника (над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$). Тогда в произвольной системе координат $[x_0 : x_1 : x_2]$ в $\mathbb{P}^2$ уравнение коники C имеет вид:*

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ – вектор-строка координат точки $X \in \mathbb{P}^2$, а $A = (a_{ij})$, $0 \le i, j \le 2$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (соответственно, $a_{ij} \in \mathbb{C}$), – невырожденная симметрическая матрица:

$$\det A \neq 0,$$

то есть что $F(\mathbf{x})$ – невырожденная квадратичная форма

Указание к решению. Воспользоваться тем, что каждая квадратичная форма (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) некоторым преобразованием координат приводится к сумме квадратов. Если приэтом форма $F(\mathbf{x})$ вырождена, то по известному результату линейной алгебры она приводится невырожденной заменой переменных к сумме одного или двух квадратов с коэффициентами ± 1. Отсюда легко следует, что C представляет собой пару прямых или сдвоенную прямую, вопреки ее невырожденности.

Задача 14. *В условиях задачи 13 для произвольной точки $Y \in \mathbb{P}^2$ с координатами $\mathbf{y} = (y_0, y1, y_2)$ уравнение ее поляры $\mathbf{p}_Y$ относительно коники C имеет вид:*

$$\mathbf{p}_Y : \quad \mathbf{y}A\mathbf{x}^T = 0, \tag{11}$$

Другими словами, точки X и Y в $\mathbb{P}^2$ сопряжены относительно коники C, если они удовлетворяют уравнению (11).

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $Y \notin C$, т. е. согласно (10)

$$\mathbf{y}A\mathbf{y}^T \neq 0.$$

Рассмотрим в $\mathbb{P}^2$ прямую l с уравнением

$$l = \{X \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{y}A\mathbf{x}^T = 0\} = \{X \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = 0\}, \tag{12}$$

и для любой точки $X \in l$ найдем точки $\{Z_1, Z_2\} = C \cap (XY)$. Для этого, подставляя выражение

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \theta\mathbf{y}.$$

в уравнение (10) и учитывая, что $\mathbf{x}A\mathbf{y}^T = 0$, находим:

$$0 = F(\mathbf{x} + \theta\mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \theta\mathbf{y})A(\mathbf{x} + \theta\mathbf{y})^T = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T + \theta^2\mathbf{y}A\mathbf{y}^T.$$

Отсюда, обозначая через θ одно из двух противоположных значений квадратного корня $\sqrt{-\mathbf{x}A\mathbf{x}^T/\mathbf{y}A\mathbf{y}^T}$, находим:

$$Z_1 : \ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \theta\mathbf{y}, \quad Z_2 : \ \mathbf{z} = \mathbf{x} - \theta\mathbf{y}.$$

Тем самым, по следствию 2 из задачи 10 Семинара 1 получаем, что пара точек X и Y гармонически делит пару точек Z_1 и Z_2. Ввиду следствия 4 из задачи 5 мы получаем, что l – поляра точки Y относительно коники C.

Теперь рассмотрим случай, когда $Y \in C$, т. е.

$$\mathbf{y}A\mathbf{y}^T = 0.$$

Опять рассмотрим прямую l из (12) и возьмем произвольную точку $x \in l \setminus (l \cap C)$, так что $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T \neq 0$. Подставляя выражение

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + \theta\mathbf{x}.$$

в уравнение (10) и учитывая, что $\mathbf{y}A\mathbf{y}^T = \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = 0$, находим:

$$0 = F(\mathbf{y} + \theta\mathbf{x}) = (\mathbf{y} + \theta\mathbf{x})A(\mathbf{y} + \theta\mathbf{x})^T = \theta^2\mathbf{x}A\mathbf{x}^T.$$

Так как $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T \neq 0$, то отсюда находим $\theta = 0$. Это означает, что прямая l пересекает конику C в единственной точке Y, т.е. l – касательная к C в точке Y. Но тогда согласно следствию 2 из задачи 5 l – поляра точки Y относительно коники C. □

3. Пучки квадрик на $\mathbb{P}^1$ и пучки коник на $\mathbb{P}^2$.

Определение. Квадрикой на $\mathbb{P}^n$ называется множество решений уравнения $F(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$, где $x_0, ..., x_n$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^n$, а $F(x_0, x_1, ..., x_n)$ – квадратичная форма (т.е. однородный многочлен степени два) от координат $x_0, ..., x_n$. В частности, если $n = 1$ и $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, то квадрика на $\mathbb{P}^1$ – это либо пара различных точек, либо пара совпавших точек (т.е. точка, считаемая с кратностью 2); соответственно, если $n = 1$ и $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, то квадрика на $\mathbb{P}^1$ – это либо пара различных точек, либо пара совпавших точек (т.е. точка, считаемая с кратностью 2), либо пустое множество. В последнем случае, однако, отсутствие вещественных корней ненулевого многочлена $F(x_0, x_1)$ с вещественными коэффициентами означает, что его корни не являются вещественными. В этой ситуации мы иногда будем говорить, что квадрика $\{F(x_0, x_1) = 0\}$ есть пара мнимых точек.

Согласно этому определению, коника – это квадрика на $\mathbb{P}^2$.

Определение. Пусть $Q_1 = \{F_1(x_0, x_1, ..., x_n) = 0\}$ и $Q_2 = \{F_2(x_0, x_1, ..., x_n) = 0\}$ 1– две квадрики в $\mathbb{P}^n$. **Пучком квадрик, порожденным квадриками** Q_1 **и** Q_2 (или **натянутым на** Q_1 **и** Q_2) называется множество $< Q_1, Q_2 >$ квадрик в $\mathbb{P}^n$ вида

$$Q_\lambda = \{F_1(x_0, x_1, ..., x_n) + \lambda F_2(x_0, x_1, ..., x_n) = 0\}, \quad \lambda \in \mathbf{k} \cup \{\infty\},$$

или, что то же самое,

$$Q_\lambda = \{\lambda_1 F_1(x_0, x_1, ..., x_n) + \lambda_2 F_2(x_0, x_1, ..., x_n) = 0\}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{k}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0).$$

При этом λ называется **неоднородным параметром**, а λ_1, λ_2 – **однородными параметрами** пучка $< Q_1, Q_2 >$.

Определение. Стереографическая проекция невырожденной коники C из произвольной точки $O \in C$ на проективную прямую $\mathbb{P}^1$ устанавливает биекцию $f : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$. Под **однородными координатами на конике** C мы будем понимать координаты

$$[y_0 : y_1], \quad y_i = f^* u_i, \quad i = 0, 1,$$

где $[u_0 : u_1]$ – произвольные однородные координаты на $\mathbb{P}^1$.

Задача 15. *Пусть C – невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$, $[x_0 : x_1 : x_2]$ – произвольные однородные координаты в $\mathbb{P}^2$, а $[y_0 : y_1]$ – произвольные однородные координаты в C. Тогда однородные координаты точек коники C выражаются через кооординаты $[y_0 : y_1]$ посредством формул*

$$x_i = \Phi_i(y_0, y_1), \quad i = 0, 1, 2, \tag{13}$$

где $\Phi_0, \ \Phi_1, \ \Phi_2$ – подходящие квадратичные формы от переменных y_0, y_1.

Определение. Пучком квадрик на невырожденной конике C будем называть множество пар точек на C, которое при биекции $f : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ переходит в пучок квадрик на $\mathbb{P}^1$.

Замечание. Из этого определения и предыдущих определений следует, что в произвольных однородных координатах $[y_0 : y_1]$ на C пучок квадрик на C задается уравнениями:

$$Q_\lambda = \{F_1(y_0, y_1) + \lambda F_2(y_0, y_1) = 0\}, \quad \lambda \in \mathbf{k} \cup \{\infty\}.$$

где $F_1(y_0, y_1)$ и $F_2(y_0, y_1)$ – подходящие квадратичные формы от переменных y_0, y_1.

Задача 16. *Произвольный пучок прямых в $\mathbb{P}^2$ высекает на невырожденной конике C в $\mathbb{P}^2$ пучок квадрик.*

Указание к решению. Написать уравнение пучка прямых и воспользоваться задачей 15.

Задача 17. *Докажите, что множество M всех пар точек на $\mathbb{P}^1$, гармонически делящих фиксированную пару точек A и B, является пучком квадрик на $\mathbb{P}^1$.*

Указание к решению. Перенесите множество M на невырожденную конику C посредством стереографической проекции $f : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ коники C на $\mathbb{P}^1$ и воспользуйтесь замечанием 2.б к задаче 5 и задачей 16.

Следствие. *Докажите, что для двух данных пар различных точек A, B и A', B' на $\mathbb{P}^1$ существует единственная пара точек C, D на $\mathbb{P}^1$ таких, что четверки $ABCD$ и $A'B'CD$ – гармонические.*

Решение. Действительно, пусть O – точка пересечения прямых (AB) и $(A'B')$. Тогда согласно замечанию 2.б к задаче 5 пара C, D точек пересечения поляры $\mathbf{p}_O$ точки O с коникой C – искомая пара. □

Задача 18. *Пусть $P, \ Q, \ R, \ S$ – четыре различные точки на $\mathbb{P}^2$, никакие три из которых не коллинеарны. Тогда*
1) существует единственный пучок коник на $\mathbb{P}^2$, проходящих через точки $P, \ Q, \ R, \ S$;
2) в этом пучке имеются в точности три вырожденные коники $C_1 = (PS) \cup (QR), \ C_2 = (QS) \cup (PR)$ и $C_3 = (RS) \cup (PQ)$.

Решение. 1) Рассмотрим пучок коник $< C_1, C_2 >$. Возьмем произвольную точку T в $\mathbb{P}^2$, такую, $T \notin C_1, \ C_2, \ C_3$, т.е. что никакие 3 из точек $P, \ Q, \ R, \ S, \ T$ не коллинеарны. (Так как $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то такая точка T найдется.) Согласно следствию 1 из задачи 4 через $P, \ Q, \ R, \ S, \ T$ проходит единственная коника C, притом невырожденная. С другой стороны, по свойству пучка $< C_1, C_2 >$ через T проходит единственная коника C_λ этого пучка, а значит, C_λ проходит и через точки $P, \ Q, \ R, \ S$. Следовательно, $C_\lambda = C$.

2) Осталось лишь проверить, что $C_3 \in < C_1, C_2 >$. В самом деле, так как никакие 3 из точек $P, \ Q, \ R, \ S$ не коллинеарны, то, как известно (и легко видеть), существует такая система координат $[x_0 : x_1 : x_2]$ в $\mathbb{P}^2$, что $P = [1 : 0 : 0], \ Q = [0 : 1 : 0], \ R = [0 : 0 : 1], \ S = [1 : 1 : 1]$. Тем самым, распавшиеся коники C_i имеют уравнения $F_i(x_0, x_1, x_2) = 0, \ i = 1, 2, 3$, где $F_1 = x_0(x_1 - x_2), \ F_2 = x_1(x_2 - x_0), \ F_3 = x_2(x_1 - x_0)$. Отсюда $F_3 = F_1 + F_2$, так что $C_3 \in < C_1, C_2 >$. □

Следствие. *В условиях задачи 18 пусть* $A_1 = (PS) \cap (QR)$, $A_2 = (QS) \cap (PR)$ *и* $A_3 = (RS) \cap (PQ)$ *– особые точки распавшихся коник* C_1 C_2 *и* C_3 *соответственно. Тогда треугольник* $A_1A_2A_3$ *автополярный для любой коники пучка* $< C_1, C_2 >$. *В частности, если, например,* $B_1 = (A_1A_2) \cap (PQ)$, *то пара* A_1A_2 *гармонически делит пару* (PQ). $\square$

Задача 19. *(1) Даны невырожденная коника* $\mathcal{C}$ *и шесть различных точек* A, B, C, A_1, B_1, C_1 *на* $\mathcal{C}$ *таких, что пара* A, A_1 *гармонически делит пару* B, C, *пара* B, B_1 *гармонически делит пару* A, C, *и пара* C, C_1 *гармонически делит пару* A, B. *Тогда пары точек* A, A_1, B, B_1 *и* C, C_1 *принадлежат одному пучку квадрик на* $\mathcal{C}$.
(2) Обратно, если пары точек A, A_1, B, B_1 *и* C, C_1 *на конике* $\mathcal{C}$ *принадлежат одному пучку, и при этом пара* A, A_1 *гармонически делит пару* B, C, *а пара* B, B_1 *гармонически делит пару* A, C, *то и пара* C, C_1 *гармонически делит пару* A, B.

Решение. Это прямо вытекает из следствия к задаче 12.

Замечание. *Утверждение задачи 19, очевидно, остается в силе, если вместо коники* $\mathcal{C}$ *взять проективную прямую* $\mathbb{P}^1$.