5. Двойное отношение четверки точек на проективной прямой.

Рассмотрим 4 различные точки A, B, C и D на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с координатами $A: \mathbf{x} = [x_0 : x_1]$, $B: \mathbf{y} = [y_0 : y_1]$, $C: \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} := [x_0 + \lambda y_0 : x_1 + \lambda y_1]$, $D: \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = [x_0 + \mu y_0 : x_1 + \mu y_1]$, $\lambda, \mu \in \mathbf{k}^*$, в некоторой проективной системе координат $[x_0 : x_1]$ на $\mathbb{P}^1$. Обозначим

$$(ABCD) = (AB, CD) := \frac{\lambda}{\mu}.$$

Число $(ABCD)$ называется *двойным* или *сложным* отношением четырех точек A, B, C, D (по-английски: *cross-ratio*) на проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Задача 10. *Пользуясь тем, что точки A, B, C и D различны, проверьте, что это определение корректно: в данной проективной системе координат на $\mathbb{P}^1$, заменяя, если необходимо, проективные координаты $\mathbf{x}$ данной точки на $\alpha\mathbf{x}$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{k}^*$, мы всегда можем найти такие координаты $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и числа $\lambda, \mu \in \mathbf{k}^*$, что $A = \mathbf{x}$, $B = \mathbf{y}$, $C = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$, $D = \mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$.*

Следствие 1. *Пусть на $\mathbb{P}^1$ выбрана аффинная система координат, в которой $A = 0$, $B = \infty$, $D = 1$. Тогда $(ABCD)$ есть аффинная координата точки C.*

Следствие 2. *Пусть три различные точки A, B и C на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ имеют в произвольной проективной системе координат на $\mathbb{P}^1$ координаты*

$$A = \mathbf{x}, \quad B = \mathbf{y}, \quad C = \mathbf{x} + \theta\mathbf{y}, \quad \theta \in \mathbf{k}^*.$$

Докажите, что $D \in \mathbb{P}^1$ – четвертая гармоническая для A, B и C т. и т. т., к.

$$D = \mathbf{x} - \theta\mathbf{y}.$$

Иными словами, A, B, C, D – гармоническая четверка точек т. и т. т., к. $(ABCD) = -1$.
Указание к решению: воспользоваться задачей 9.

Задача 11. *Покажите, что двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от выбора проективной системы координат на $\mathbb{P}^1$. Другими словами, если в новой системе координат точки A и B имеют координаты $\mathbf{x}' = [x'_0 : x'_1]$ и $\mathbf{y}' = [y'_0 : y'_1]$, а точки C и D – соответственно координаты*

$$C: \quad \mathbf{x}' + \lambda'\mathbf{y}', \quad D: \quad \mathbf{x}' + \mu'\mathbf{y}',$$

то $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, а значит,

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Указание к решению: линейная зависимость вида $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ сохраняется при линейных преобразованиях векторного пространства, т.е. если $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$, то и $\mathbf{z}' = \mathbf{x}' + \lambda\mathbf{y}'$.

Задача 12. *Пусть в некоторой проективной системе координат $[x_0 : x_1]$ на $\mathbb{P}^1$ точки A, B, имеют координаты $\mathbf{x} = [x_0 : x_1]$ и $\mathbf{y} = [y_0 : y_1]$, а точки C и D – координаты*

$$A: \ \mathbf{x} = [x_0 : x_1], \quad B: \ \ \mathbf{y} = [y_0 : y_1], \quad C: \ \ \mathbf{z} = [z_0 : z_1], \quad D: \ \ \mathbf{w} = [w_0 : w_1].$$

Введем обозначение: $|\mathbf{xy}| := \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$. *Покажите, что*

$$(ABCD) = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{xw}|} \Big/ \frac{|\mathbf{yz}|}{|\mathbf{yw}|} = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{yz}|} \Big/ \frac{|\mathbf{xw}|}{|\mathbf{yw}|}.$$

Правило для запоминания: если символически записать $\mathbf{x} = 1$, $\mathbf{y} = 2$, $\mathbf{z} = 3$, $\mathbf{w} = 4$, то

$$(ABCD) = \frac{|13|}{|14|} \Big/ \frac{|23|}{|24|} = \frac{|13|}{|23|} \Big/ \frac{|14|}{|24|}.$$

Задача 13. *Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных отображениях (преобразованиях) проективной прямой.*

Указание к решению: Воспользоваться задачей 5 и тем, что перспективное отображение проективных прямых $f: \mathbf{l} \to \mathbf{l}'$ задается формулой $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ в подходящим образом выбранных проективных координатах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ на $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ соответственно.