Подробный план первого занятия

1. Определение проективной прямой, проективной плоскости и проективного пространства (как проективизаций векторных пространств размерности 2, 3 и 4) над произвольным полем. Проективная прямая в случае основного поля **R** (окружность) и **C** (сфера).

Свойства инциденции точка-прямая, принцип двойственности. Любые две проективные прямые в **RP**2 пересекаются (простое следствие определения).

2. Теоремы Дезарга для RP2 (синтетическое доказательство).

Теорема Дезарга. *Если прямые, соединяющие соответственные вершины P и P', Q и Q', R и R' двух треугольников, проходят через одну точку O, то точки A=PQ.P'Q', B=RP.R'P' и C=PQ.P'Q' пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой.*

Доказательство (Штаудт). Теорема становится очевидной, если два треугольника PQR и P'Q'R' лежат в различных плоскостях — в этом случае точки A,B и C лежат одновременно в плоскостях обоих треугольников, а значит, на прямой их пересечения. Тогда теорема для треугольников, лежащих в одной плоскости, получается из предыдущей как предельный случай, ч.т.д.

Задача 1. *Пользуясь теоремой Дезарга для пространственного случая, дайте прямое доказательство теоремы Дезарга для плоского случая без перехода к пределу.*

3. Проективные и аффинные координаты на Pn. Определение проективного отображения проективной прямой на другую проективную прямую и проективного преобразования прямой RP1.

Проективные и аффинные координаты на **P**n. Определение проективного преобразования прямой **RP1=P(V)** как преобразования, соответствующего линейному преобразованию векторного пространства **V**. Как следствие, в аффинной координате **x** на **RP1** проективное преобразование прямой **RP1** задается как дробно-линейное преобразование **x'=(ax+b)/(cx+d)**, где числа **a,b,c** и **d** образуют невырожденную 2x2-матрицу.

Замечание. Всякое проективное преобразование является биективным отображением проективной прямой в себя.

Задача 2. *Пусть* ***l*** *и* ***l'*** *– прямые в проективной плоскости* ***RP2,*** *и пусть* ***f: l ––--> l'*** *– перспективное отображение (=линейная проекция) с центром* ***O*** *в* ***RP2***. *Покажите, что в произвольных аффинных координатах* ***x*** *и* ***x'*** *на* ***l*** *и* ***l'*** *соответственно отображение* ***f*** *задается дробно-линейным преобразованием от* ***x*** *к* ***x'***.

Назовем *проективным отображением* ***f: l ––--> l'*** *прямой* ***l*** *на прямую* ***l'*** отображение, разлагающееся в композицию перспективных отображений (линейных проекций).

Задача 3. *Произвольное проективное отображение* ***f: l ––--> l'*** *однозначно определяется образами трех различных точек.*

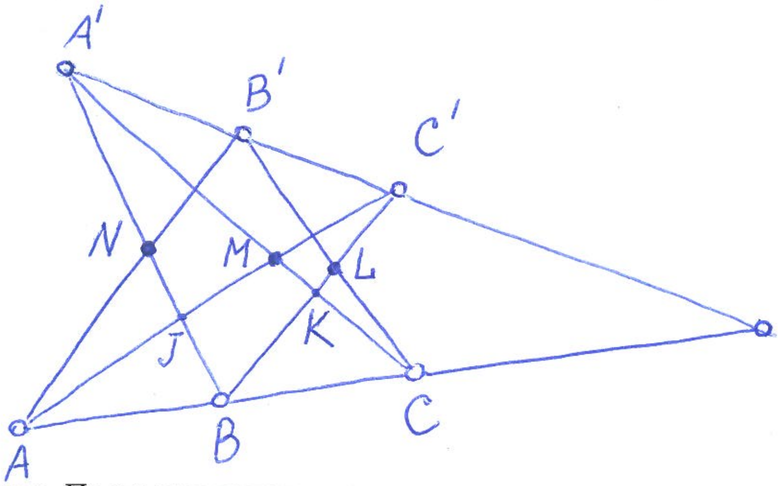
Указание к решению. Достаточно выбрать координаты **x** и **x'** на **l** и **l'** соответственно так, чтобы образ несобственной точки на **l** был несобственной точкой на **l'**. Тогда **f** задается формулой **x'=ax+b**. Остальное очевидно.

Задача 4. *Проективное отображение **f**: l ----> l' двух различных прямых l и l' является перспективным тогда и только тогда, когда точка пересечения прямых l и l' отображается при f в себя.*
Указание к решению: воспользоваться задачей 3.

Задача 5. *Всякое проективное преобразование прямой (соответственно, проективное отображение проективной прямой на другую проективную прямую) разлагается в композицию не более трех (соответственно, не более двух) перспектив.*
Указание к решению: воспользоваться задачей 3 и провести синтетическое доказательство у доски.

4. Теорема Паппа для RP2 (синтетическое доказательство).

Теорема Паппа. *Если точки A,B,C и, соответственно, точки A',B',C' коллинеарны, то точки L=BC'.B'C, M=CA'.C'A и N=AB'.A'B лежат на одной прямой.*



Доказательство. Построим дополнительные точки

J=AC'.BA', K=BC'.CA', O=AB.A'B'.

Тогда четверка точек A'NJB перспективна четверке точек A'B'C'O относительно центра A, четверка точек A'B'C'O перспективна четверке точек KLC'B относительно центра C.
Таким образом, в проективном соответствии

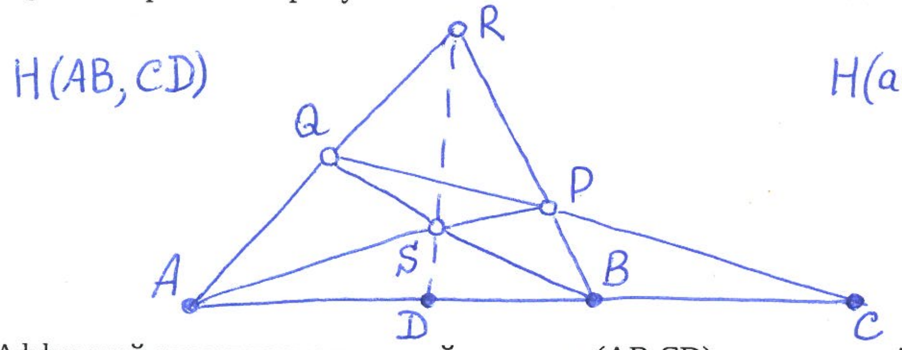
A'NJ ------> KLC'

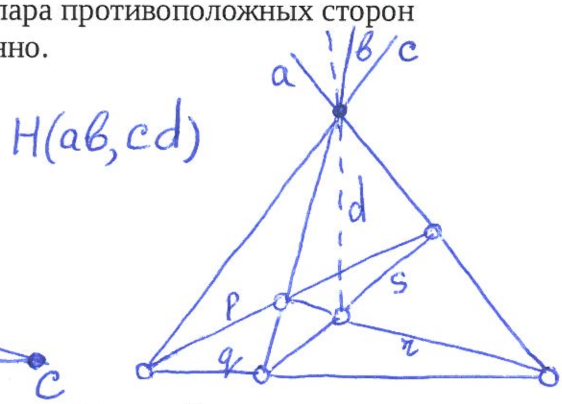
точка B будет инвариантной точкой. Но согласно задаче 4 такое проективное соответствие будет перспективным. При этом центром перспективы будет точка M, так как прямые A'K и JC', соединяющие соответственные точки, проходят через M.
Следовательно, и NL пройдет через M, ч.т.д.

5. Полный четырехсторонник и полный четырехвершинник.

Определение гармонической четверки точек (AB,CD): Обозначение: H(AB, CD)

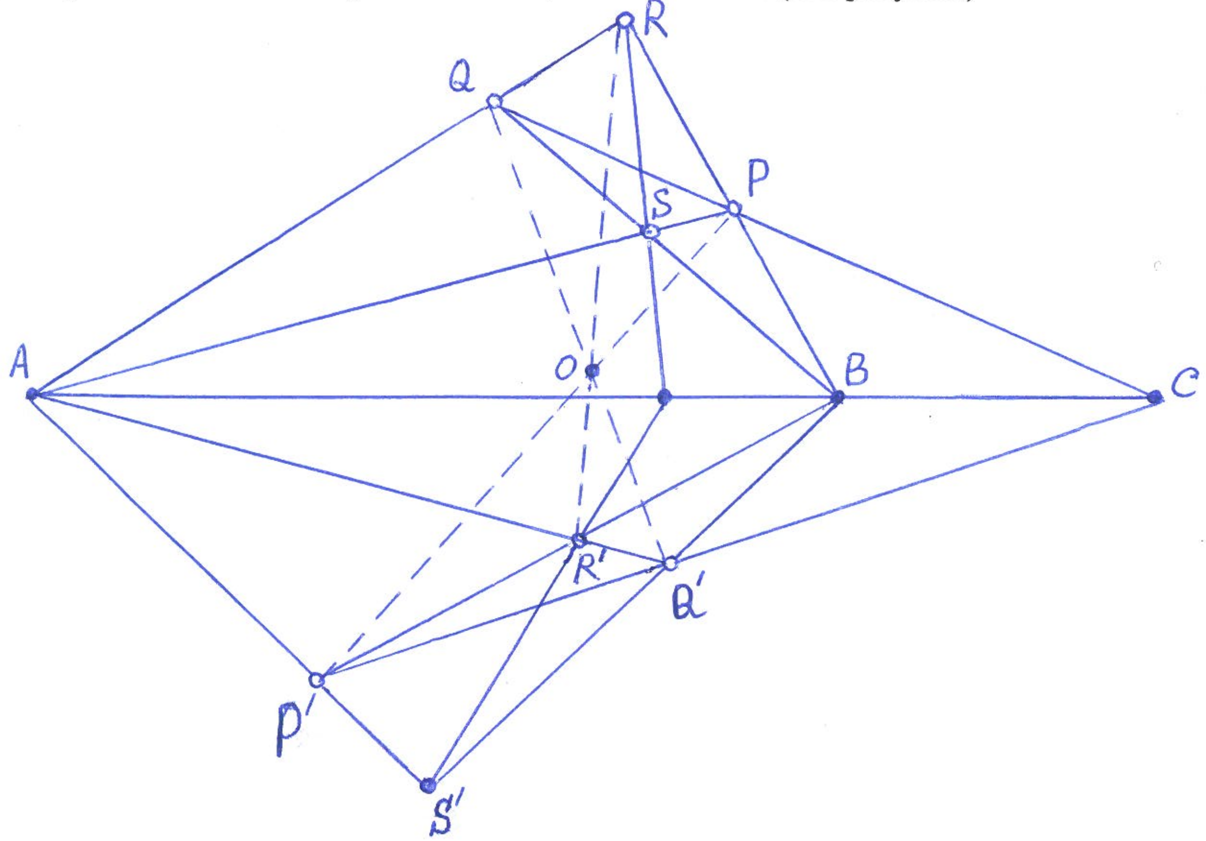
Говорят, что *пара точек C,D гармонически делит пару точек A,B*, если существует полный четырехвершинник PQRS, две пары противоположных сторон PS, RQ и PR, QS которого пересекаются в точках A и B соответственно, а оставшаяся пара противоположных сторон PQ и RS пересекает прямую AB в точках C и D соответственно.





Аффинный смысл гармонической четверки (AB,CD), когда точка A - несобственная.

Задача 6. *Гармоничность четверки (AB,CD) не зависит от выбора полного четырехвершинника, участвующего в ее определении.*
Дать синтетическое доказательство у доски.
Указание: для доказательства этого факта воспользуемся теоремой Дезарга.
Решение. Предположим, что выбран другой треугольник P'Q'R', приводящий к 4-угольнику P'Q'R'S', так что точки A,B,C построены по 4-угольнику P'Q'R'S так же, как и по 4-угольнику PQRS. При этом D=RS.AB. Нужно показать, что D=R'S'.AB. (См. рисунок.)

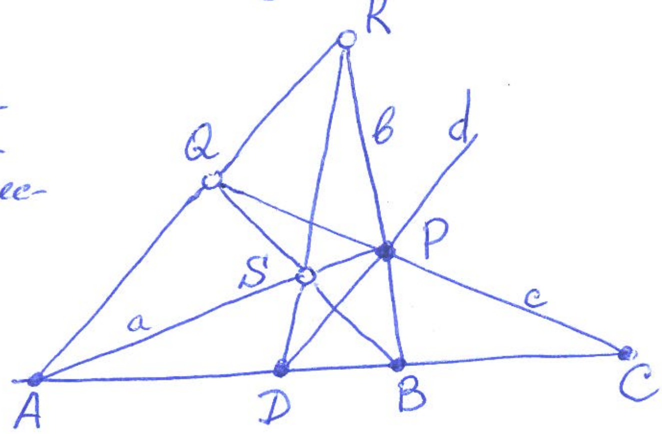


Но согласно теореме Дезарга прямые PP', QQ', RR' проходят через одну точку O=PP'.QQ'. Применяя эту же теорему к треугольникам PQS и P'Q'S', получаем, что прямая SS' проходит через ту же точку O. Тем самым, и треугольники RSP и R'S'P' удовлетворяют условию теоремы Дезарга. А значит, точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой. Но две из этих точек — это A и B. Поэтому и точка пересечения прямых RS и R'S' лежит на прямой AB и совпадает с D, ч.т.д.

Задача 7. *Гармоничность четверки (AB,CD) влечет гармоничность четверки (CD,AB).* (Доказательство синтетическое у доски.) $H(AB, CD) \Rightarrow H(CD, AB)$

Задача 8. *Проективное отображение проективной прямой на проективную прямую переводит гармоническую четверку точек в гармоническую.*
Указание к решению. Достаточно убедиться в справедливости этого утверждения для перспективных отображений. А именно, соединяя произвольную точку плоскости с гармонической четверкой точек, получим гармоническую четверку прямых. Это и двойственное к нему утверждение дают требуемое для перспективного отображения.

Доказательство. Докажем подчеркнутое утверждение: если соединить точки A, B, C, D гармонической четверки с точкой P вне прямой, на которой они лежат, то получим гармоническую четверку прямых a, b, c, d.



Действительно, можно в силу задачи 6 считать P вершиной треугольника PQR, участвующего в построении точки D, четвертой гармонической для A, B и C. Тогда полный 4-сторонник с 6 вершинами ASBRQD и сторонами AR, AB, QB, SR имеют 2 противоположные вершины на AS = a, две другие — на BR = b, одну вершину Q на c и одну вершину D на d. Следовательно, H(ab, cd).

Задача 9. *Если (AB,CD) – гармоническая четверка, и проективные координаты на прямой выбраны так, что A=[1:0], B=[0:1], C=[u:v], то D=[v:-u]. В частности, если C=[1:1], то D=[1:-1]. Сформулируйте обратное утверждение.*

Замечание к задаче 8. Стороны 4-сторонника ASBRQD упорядочиваем так: $\underset{1}{AR}$ $\underset{2}{AB}$, $\underset{3}{QB}$, $\underset{4}{SR}$. Тогда:

$$\left.\begin{array}{l} a = \langle \overset{A}{(1\cap 2)} \cup \overset{S}{(3\cap 4)} \rangle = AS \\ b = \langle \overset{R}{(1\cap 4)} \cup \overset{B}{(2\cap 3)} \rangle = RB \\ c \ni \underset{\underset{Q}{\shortparallel}}{(1\cap 3)},\quad d \ni \underset{\underset{D}{\shortparallel}}{(2\cap 4)} \end{array}\right\} \Rightarrow H(ab, cd),\ \text{ч.т.д.}$$

$C \in c \Leftarrow Q$