Тема 3. Задачи евклидовой и других геометрий, решаемые средствами проективной геометрии

1. Группа подобий евклидова пространства как подгруппа проективной группы.

Как и ранее, мы работаем в $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ какподмножество в $\mathbb{C}^{n+1}$ (и даже как подпространство в $\mathbb{C}^{n+1}$, рассматриваемом как вещественное пространство), и пусть $(x_0, ..., x_n)$ – координаты в стандартном базисе в $\mathbb{R}^{n+1}$ (соответственно, в $\mathbb{C}^{n+1}$). Тогда для проективных пространств $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ также имеем вложение (как вещественнных многообразий)

$$\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^n. \tag{1}$$

Замечание. В бескоординатной форме вложение $\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$ задается следующим образом. Пусть V – вещественное $(n+1)$-мерное векторное пространство. Его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ можно определить как пространство $V \oplus V$ со структурой умножения на мнимую единицу i (а тем самым, и на все комплексные числа по $\mathbb{R}$-линейности) по формуле: $i(x, y) := (-y, x)$. Вложим V в $V^{\mathbb{C}}$ по формуле: $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}},\ x \mapsto (x, 0)$ и определим на $V^{\mathbb{C}}$ инволюцию комплексного сопряжения $\sigma:\ V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}},\ (x, y) \mapsto (x, -y)$. Тогда V – σ-инвариантное подмножество в $V^{\mathbb{C}}$. Другой бескоординатный способ определения пространства $V^{\mathbb{C}}$ и инволюции σ: $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\sigma:\ V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}},\ x \otimes z \mapsto x \otimes \overline{z}$; При этом биекция f между первым и вторым определением $V^{\mathbb{C}}$ задается формулами: $f(x, y) = x \otimes 1 + y \otimes i,\quad f^{-1}(x \otimes (a + ib)) = (ax, bx)$.

Далее, вложение $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ индуцирует корректно определенное вложение проективных пространств как множеств (а точнее, как вещественных многообразий)

$$\phi: \mathbb{RP}^n = P(V) \hookrightarrow P(V^{\mathbb{C}}) = \mathbb{CP}^n,\ < x >_{\mathbb{R}} \mapsto < (x, 0) >_{\mathbb{C}}. \tag{2}$$

По построению вложение ϕ в (2) совпадает с вложением (1) при согласованных между собой отождествлениях V с $\mathbb{R}^{n+1}$ и $V^{\mathbb{C}}$ с $\mathbb{C}^{n+1}$. Кроме того, инволюция σ на $V^{\mathbb{C}}$ индуцирует инволюцию $\underline{\sigma}$ на $P(V^{\mathbb{C}})$ по формуле:

$$\underline{\sigma}:\ P(V^{\mathbb{C}}) \to P(V^{\mathbb{C}}),\ < v >_{\mathbb{C}} \mapsto < \sigma(v) >_{\mathbb{C}}.$$

(Инволюция $\underline{\sigma}$ корректно определена в силу легко проверяемого равенства $\sigma(zv) = \overline{z}\sigma(v),\ z \in \mathbb{C},\ v \in V^{\mathbb{C}}$.) Проверим, что $\underline{\sigma}$-инвариантное подмногообразие в $P(V^{\mathbb{C}})$ есть $P(V)$.

Действительно, пусть $< v >_{\mathbb{C}} = < \sigma(v) >_{\mathbb{C}}$ для $0 \neq v = (x, y) \in V^{\mathbb{C}}$. Это означает, что существуют числа $0 \neq z = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ и $0 \neq w = b_1 + ib_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $zv = w\sigma(v)$. Раскрывая это равенство, получим следующие соотношения

$$(a_1 - b_1)x = (a_2 + b_2)y, \quad (b_2 - a_2)x = (a_1 + b_1)y. \tag{3}$$

Если $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 0$, то из (3) находим $a_1 x = a_2 x = 0$. Если при этом $x \neq 0$, то из последних четырех равенств получаем $z = w = 0$ вопреки предположению. Следовательно, $x = 0$, откуда $v = (0, y) = -i(y, 0)$, а значит, $< v >_{\mathbb{C}} = \phi(< y >_{\mathbb{R}}) \in \phi(P(V))$. Если хотя бы одно из чисел $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$, отлично от нуля, например $a_1 + b_1 \neq 0$, то из (3) находим $y = cx$, где $c = (b_2 - a_2)/(a_1 + b_1)$, откуда $v = (x, y) = (x, cx) = (1 + ci)(x, 0)$. Тем самым, снова получаем $< v >_{\mathbb{C}} = \phi(< x >_{\mathbb{R}}) \in \phi(P(V))$, что и требовалось. $\square$

В пространствах $\mathbb{RP}^n$ и $\mathbb{CP}^n$ имеем естественные проективные координаты $[x_0 : ... : x_n]$ (комплексные в $\mathbb{CP}^n$ и вещественные в $\mathbb{RP}^n$ соответственно). В частности, если в $\mathbb{P}^n$ взять гиперплоскость

$$\mathbb{CP}^{n-1}_{\infty} = \{x_0 = 0\} \tag{4}$$

(и объявить ее **бесконечно удаленной гиперплоскостью**), то

$$\mathbb{CP}^{n-1} \cap \mathbb{RP}^n =: \mathbb{RP}^{n-1}_\infty$$

– гиперплоскость в $\mathbb{RP}^n$, задаваемая тем же уравнением $\{x_0 = 0\}$:

$$\mathbb{RP}^{n-1}_\infty = \{x_0 = 0\}. \tag{5}$$

Заметим, что по определению $[x_1 : ... : x_n]$ – однородные проективные координаты в $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ и $\mathbb{RP}^{n-1}_\infty$ соответственно. В этих координатах рассмотрим в $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ гиперквадрику

$$Q_\infty = \{x \in \mathbb{CP}^{n-1}_\infty \mid x_1^2 + ... + x_n^2 = 0\} \tag{6}$$

и назовем ее **абсолютом (евклидовой геометрии)**. Заметим, что уравнение $x_1^2+...+x_n^2 = 0$ не имеет ненулевых вещественных решений, т.е.

$$Q_\infty \cap \mathbb{RP}^{n-1}_\infty = \emptyset. \tag{7}$$

Далее, дополнения к $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ в $\mathbb{CP}^n$ и, соответственно, к $\mathbb{RP}^{n-1}_\infty$ в $\mathbb{RP}^n$ суть аффинные пространства

$$\mathbb{A}^n_\mathbb{C} = \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-1}_\infty \tag{8}$$

и, соответственно,

$$\mathbb{A}^n_\mathbb{R} = \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1}_\infty \tag{9}$$

с аффинными координатами

$$(y_1, ..., y_n) = (\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}) \tag{10}$$

(комплексными в $\mathbb{A}^n_\mathbb{C}$ и вещественными в $\mathbb{A}^n_\mathbb{R}$ соответственно).

Для поля $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ рассмотрим проективную группу

$$G_\mathbf{k} = PGL(n+1, \mathbf{k}) = \{[A]_\mathbf{k} \in M(n+1, \mathbf{k})^*/\mathbf{k}^* \mid \det A \neq 0\},$$

где $M(n+1, \mathbf{k})^*$ – множество ненулевых квадратных матриц $(n+1)$-го порядка над $\mathbf{k}$, а через $[A]_\mathbf{k}$ обозначен класс пропорциональности $\mathbf{k}^*A$ матрицы A. Группа $G_\mathbb{C}$ действует естественным образом на $\mathbb{CP}^n$: для произвольной точки $x \in \mathbb{CP}^n$ с координатами $\mathbf{x} = [x_0 : ... : x_n]$ ее образ под действием элемента $g = [A]_\mathbb{C} \in G_\mathbb{C}$ есть точка с координатами $g(\mathbf{x})$, где

$$(g(\mathbf{x}))^T = A\mathbf{x}^T. \tag{11}$$

Аналогично, группа $G_\mathbb{R}$ действует естественным образом на $\mathbb{RP}^n$ по той же формуле (11).

Как мы знаем (и легко видеть), аффинная группа $\mathrm{Aff}_{n,\mathbf{k}} = \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n_\mathbf{k})$ отождествляется с подгруппой группы $G_\mathbf{k}$, оставляющей инвариантной бесконечно удаленную гиперплоскость $\mathbf{k}\mathbb{P}^{n-1}_\infty$:

$$\mathrm{Aff}_{n,\mathbf{k}} = \{g \in G_\mathbf{k} \mid g(\mathbf{k}\mathbb{P}^{n-1}_\infty) = \mathbf{k}\mathbb{P}^{n-1}_\infty\}, \quad \mathbf{k} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}. \tag{12}$$

А именно, в аффинных координатах $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ точки y в $\mathbb{A}^n_\mathbf{k}$ (см. (10)) аффинная группа $\mathrm{Aff}_{n,\mathbf{k}}$ действует по правилу: мы рассматриваем элемент $g \in \mathrm{Aff}_{n,\mathbf{k}}$ как расширенную матрицу

$$g = (A \mid b^T), \quad A \in GL(n, \mathbf{k}), \quad b \in \mathbf{k}^n, \tag{13}$$

и аффинные координаты $g(\mathbf{y})$ образа $g(y)$ точки y находятся по формуле

$$(g(\mathbf{y}))^T = A\mathbf{y}^T + b^T. \tag{14}$$

Вышеуказанный мономорфизм $\mathrm{Aff}_{n,\mathbf{k}} \overset{i}{\hookrightarrow} G_\mathbf{k}$ (см. (12)) задается при этом так:

$$i(A \mid b^T) = [\tilde{A}], \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & A & b^T \end{pmatrix} = (1) \oplus (A \mid b^T). \tag{15}$$

Теперь рассмотрим евклидово пространства $E^n = \mathbb{A}^n_\mathbb{R}$, для которого соответствующее векторное пространство есть пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_1 + ... + p_nq_n, \qquad \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n), \mathbf{q} = (q_1, ..., q_n) \in \mathbf{R}^n. \tag{16}$$

Определение. Углом между прямыми l и m в E^n с направляющими векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$, заданными параметрическими уравнениями

$$l: \ x = \mathbf{p}t + x_0, \quad l: \ y = \mathbf{q}t + y_0, \quad , \quad x_0, y_0 \in E^n, \tag{17}$$

назовем, как обычно, угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. **Бесконечно удаленной точкой прямой l и в E^n**, называется точка $x_\infty(l) \in \mathbb{RP}^{n-1}_\infty$, получаемая как

$$x_\infty(l) = \bar{l} \cap \mathbb{RP}^{n-1}_\infty,$$

где $\bar{l}$ – проективная прямая в $\mathbb{RP}^n$, получаемая как замыкание прямой l при вложении $E^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{RP}^n$.

Замечание. Если прямая l в E^n задана параметрическим уравнением $l: \ x = \mathbf{p}t + x_0, \ x_0 \in E^n, \ \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbf{R}^n$, то легко видеть, что

$$x_\infty(l) = (p_1 : ... : p_n) \tag{18}$$

Задача 1. *Прямые l и m в E^n перпендикулярны тогда и только тогда, когда точки $x_\infty(l)$ и $x_\infty(m)$ сопряжены относительно абсолюта Q_∞, т. е. когда они гармонически делят пару точек*

$$\{A, B\} = \mathrm{Span}(\mathrm{x}_\infty(\mathrm{l}), \mathrm{x}_\infty(\mathrm{m})) \cap Q_\infty.$$

(Здесь ввиду (1) евклидово пространство E^n считается вложенным в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$, и, соответственно, $\mathrm{Span}(\mathrm{x}_\infty(\mathrm{l}), \mathrm{x}_\infty(\mathrm{m}))$ *рассматривается как комплексная проективная прямая в пространстве $\mathbb{CP}^n$.*

Указание к решению. Это прямое следствие (6) и (16)-(18). □

Теперь рассмотрим группу подобий G_E пространства E^n как подгруппу аффинной группы $\mathrm{Aff}_{n,\mathbb{R}}$:

$$G_E = \{g = (A \mid b^T) \in \mathrm{Aff}_{n,\mathbb{R}} \mid AA^T = \lambda \mathbf{1}_n, \ \lambda \in \mathbb{R}_+\}. \tag{19}$$

Задача 2. *Группа G_E подобий евклидова пространства E^n (как подгруппа Ли группы $PGL(n+1, \mathbf{C})$ как вещественной группы Ли) есть группа вещественных автоморфизмов абсолюта Q_∞*

$$G_E = \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(Q_\infty) := PGL(n+1, \mathbf{R}) \cap \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(Q_\infty) \tag{20}$$

где $PGL(n+1, \mathbf{R})$ естественно вложена в группу $PGL(n+1, \mathbf{C})$ посредством мономорфизма вещественных групп Ли

$$PGL(n+1, \mathbf{R}) \hookrightarrow PGL(n+1, \mathbf{C}), \ [\mathcal{A}]_{\mathbf{R}} \mapsto [\mathcal{A}]_{\mathbf{C}}.$$

Решение. Действительно, всякое проективное преобразование $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(Q_\infty)$ оставляет на месте абсолют Q_∞, а значит, и его проективную оболочку $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$, т. е. принадлежит аффинной группе $\mathrm{Aff}_{n,\mathbb{C}}$. Поэтому согласно (13) и (14) всякий элемент

$$g \in \mathrm{Aff}_{n,\mathbb{R}} \cap \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(Q_\infty)$$

имеет вид

$$g = (A \mid b^T), \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

где на g наложено условие, что он сохраняет абсолют Q_∞. Последнее условие есть условие на матрицу A. Действительно, под действием элемента g форма $F(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ преобразуется по правилу $g(F)(x) = (\mathbf{x}A)(\mathbf{x}A)^T = \mathbf{x}AA^T\mathbf{x}^T$. Поэтому уравнение абсолюта $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = 0$ остается инвариантным, если $AA^T = \lambda \mathbf{1}_n$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_+$, т. е. если $g \in G_E$. □

Замечание. *Задача 2 показывает, что, в соответствии с эрлангенской программой Ф.Клейна, геометрические свойства пространства E_n суть те свойства пространства*

$\mathbb{CP}^n$, которые инвариантны относительно вещественных проективных преобразований пространства $\mathbb{CP}^n$, сохраняющих абсолют.

2. Примеры стандартных теорем аффинной и евклидовой геометрии на плоскости, получаемых средствами проективной геометрии.

В этом параграфе мы докажем средствами проективной геометрии следующие теоремы аффинной и, соответственно, евклидовой геометрии: в треугольнике три медианы (соответственно, три высоты) пересекаются в одной точке.

Предварительно введем одно определение. Пусть, как и выше, евклидова плоскость E^2 дополнена до проективной плоскости $\mathbb{P}^2 := \mathbb{RP}^2$ добавлением бесконечно удаленной прямой $l_\infty := \mathbb{RP}^1_\infty$ с уравнением $x_0 = 0$. Рассмотрим в $\mathbb{CP}^1_\infty \supset l_\infty$ абсолют Q_∞ с уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Решая над $\mathbb{C}$ это уравнение, находим

$$Q_\infty = \{I, J\}, \quad I = [0:1:i], \quad J = [0:1:-i].$$

Определение. *Точки I, J на l_∞ называются* **циклическими точками**.

Докажем теперь следующую теорему аффинной геометрии.

Теорема 1. *В треугольнике ABC три медианы пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть A_1 и B_1 – середины сторон BC и AC треугольника ABC соответственно. На l_∞ рассмотрим точки

$$A_0 = (BC) \cap l_\infty, \quad B_0 = (AC) \cap l_\infty, \quad C_0 = (AB) \cap l_\infty$$

и в треугольнике ABC точку O пересечения медиан (AA_1) и (BB_1):

$$O = (AA_1) \cap (BB_1).$$

Далее, на прямой l_∞ рассмотрим точки

$$A_0 = (BC) \cap l_\infty, \quad B_0 = (AC) \cap l_\infty, \quad C_0 = (AB) \cap l_\infty$$

и точки

$$A' = (AA_1) \cap l_\infty = (AO) \cap l_\infty, \quad , \quad B' = (BB_1) \cap l_\infty = (BO) \cap l_\infty, \quad C' = (CO) \cap l_\infty.$$

Имеем три распавшиеся коники

$$\mathcal{C}_1 = (OA_1) \cup (BC), \quad \mathcal{C}_2 = (OB_1) \cup (AC), \quad \mathcal{C}_3 = (OC_1) \cup (AB),$$

проходящие через 4 точки A, B, C и O. Так как из этих точек никакие три не коллинеарны, то коники $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ принадлежат одному пучку. Тем самым, три пары точек

$$\{A_0, A'\} = \mathcal{C}_1 \cap l_\infty, \quad \{B_0, B'\} = \mathcal{C}_2 \cap l_\infty, \quad \{C_0, C'\} = \mathcal{C}_3 \cap l_\infty$$

принадлежат одному пучку квадрик на l_∞. С другой стороны, так как A_1 – середина отрезка BC, то пара A_1, A_0 гармонически делит пару B, C. Тем самым, ввиду перспективы с центром A пара A_0, A' гармонически делит пару B_0, C_0. Аналогично пара B_0, B' гармонически делит пару A_0, C_0. Но тогда по замечанию к задаче 19 темы 2 "Коники на проективной плоскости"и пара $_0,'$ гармонически делит пару A_0, B_0. А значит, ввиду перспективы с центром C пара C_0, C_1, где $C_1 = (AB) \cap (OC)$, гармонически делит пару A, B. Так как $C_0 \in l_\infty$, то отсюда следует, что C_1 – середина отрезка AB, т. е. (CO) – медиана треугольника ABC. □

Следующие две теоремы относятся к евклидовой геометрии.

Теорема 2. *В треугольнике ABC три высоты пересекаются в одной точке (называемой ортоцентром).*

Доказательство. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты в треугольнике ABC, где $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$. Рассмотрим точки

$$O = (AA_1) \cap (BB_1), \quad A_0 = (BC) \cap l_\infty, \quad B_0 = (AC) \cap l_\infty, \quad C_0 = (AB) \cap l_\infty$$

и точки

$$A' = (AA_1) \cap l_\infty = (AO) \cap l_\infty, \quad , \quad B' = (BB_1) \cap l_\infty = (BO) \cap l_\infty, \quad C' = (CO) \cap l_\infty.$$

Имеем три распавшиеся коники

$$\mathcal{C}_1 = (OA_1) \cup (BC), \quad \mathcal{C}_2 = (OB_1) \cup (AC), \quad \mathcal{C}_3 = (OC_1) \cup (AB), \tag{21}$$

проходящие через 4 точки A, B, C и O, где $C_1 = (CO) \cap (AB)$. Так как из этих точек никакие три не коллинеарны, то коники $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ принадлежат одному пучку. Тем самым, три пары точек

$$\{A_0, A'\} = \mathcal{C}_1 \cap l_\infty, \quad \{B_0, B'\} = \mathcal{C}_2 \cap l_\infty, \quad \{C_0, C'\} = \mathcal{C}_3 \cap l_\infty$$

принадлежат одному пучку квадрик на l_∞. С другой стороны, так как прямые (AA_1) и (BC) перпендикулярны, то в силу задачи 1 пара A', A_0 сопряжена относительно абсолюта Q_∞, т. е. гармонически делит пару циклических точек I, J. По той же причине и пара B', B_0 гармонически делит пару циклических точек I, J. Следовательно, пары точек A', A_0 и B', B_0 принадлежат инволюции с неподвижными точками I, J, то есть принадлежат одному пучку квадрик на l_∞ с двумя двойными точками I, J. А значит, и пара C', C_0 принадлежит этому же пучку, то есть гармонически делит пару циклических точек I, J. Это согласно задаче 1 означает, что прямая $(CC_1) = (CO)$ перпендикулярна прямой (AB), что и требовалось. $\square$

Следствие. *Любая гипербола, проходящая через вершины треугольника ABC и его ортоцентр, является равнобочной, т. е. ее асимптоты образуют прямой угол.*

Доказательство. Действительно, вершины треугольника ABC и его ортоцентр O являются базисными точками пучка коник с тремя распавшимися кониками $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 = (OB_1) \cup (AC)$ и $\mathcal{C}_3 = (OC_1) \cup (AB)$ из (21). Тем самым, любая коника через эти 4 точки принадлежит этому пучку, а значит, пересекает по паре точек X, Y, принадлежащей одному пучку с $\mathcal{C}$ парами точек A', A_0 B', B_0 и C', C_0. Тем самым, она гармонически делит пару циклических точек I, J. Если X, Y – пара вещественных точек, то значит, коника $\mathcal{C}$ – гипербола, а точки X, Y – следы на l_∞ ее асимптот. Тем самым, асимптоты коники $\mathcal{C}$ взаимно ортогональны. $\square$

Замечание. Прокомментируем с точки зрения проективной геометрии следующую теорему евклидовой геометрии: *в треугольнике ABC три биссектрисы пересекаются в одной точке.*

Действительно, пусть a, b, c (соответственно, a', b', c') – три биссектрисы внутренних (соответственно, внешних) углов в треугольнике ABC, проходящие через точки A, B, C соответственно. По построению a перпендикулярна a', b перпендикулярна b', c перпендикулярна c'. Рассмотрим коники $C_a = a \cup a'$, $C_b = b \cup b'$, $C_c = c \cup c'$ и обозначим точки:

$$O = a \cap b, \quad O_1 = a \cap b', \quad O_2 = a' \cap b, \quad O_3 = a' \cap b'.$$

По построению $O,\ O_1,\ O_2,\ O_3$ – точки пересечения коник C_a и C_b, то есть базисные точки пучка коник $< C_a, C_b >$. При этом поскольку $(AO) = (AO_1)$ – биссектриса угла $\angle A$, а b' – биссектриса внешнего угла при вершине B, то O_1 – центр вневписанной окружности, лежащей с треугольником ABC по разные стороны от стороны (BC). Аналогично, O_2 – центр вневписанной окружности, лежащей с треугольником ABC по разные стороны от стороны (AC), а O_3 – центр вневписанной окружности, лежащей с треугольником ABC по разные стороны от стороны (AB). Поэтому прямая (O_1O_2) – биссектриса внешнего угла при вершине C, то есть совпадает с прямой c'. При этом биссектриса c проходит через точку O как центр вписанной окружности и через точку O_3 как центр вневписанной окружности.

Таким образом, коника $C_c = c \cup c'$ проходит через базисные точки $O,\ O_1,\ O_2,\ O_3$ пучка коник $< C_a, C_b >$, а значит, принадлежит этому пучку. При этом тот факт, что C_c есть объединение двух перпендикулярных прямых c и c', является следствием того, что C_a и C_b суть также объединения пар перпендикулярных прямых. Последний факт дословно повторяет аналогичный факт из доказательства теоремы 2.

3. Пример "стандартных" теорем неевклидовой геометрии на плоскости, получаемых средствами проективной геометрии.

В этом параграфе мы докажем средствами проективной геометрии следующие две теоремы неевклидовой геометрии на плоскости (называемой также геометрией Лобачевского): 1) в треугольнике три медианы пересекаются в одной точке, 2) в треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

Для этого мы воспользуемся моделью Кэли-Клейна плоскости Лобачевского Π: Π есть внутренность единичного круга с границей – окружностью ω, а прямая в Π, соединяющая пару точек $A, B \in \Pi$, есть по определению открытый интервал $(AB) \cap \Pi$. Расстояние $d(AB)$ между точками A и B определяется как модуль логарифма двойного отношения $(ABXY)$:

$$d(AB) = |\ln(ABXY)|,$$

где X и Y – точки пересечения окружности ω с прямой (AB).

Движения (изометрии) плоскости Лобачевского Π, как лежащей естественным образом в $\mathbb{RP}^2$, понимаются как проективные преобразования плоскости $\mathbb{RP}^2$, сохраняющие Π. Таким образом, группа G_Π движений плоскости Π совпадает с группой $\mathrm{Aut}(\omega) = \{g = PGL(3, \mathbb{R}) \mid g(\omega) = \omega\}$ проективных автоморфизмов окружности ω.

Замечание 1. *а) Нетрудно проверить, что середина P отрезка $[AB]$ на плоскости Лобачевского Π строится следующим образом. В точках X и Y пересечения окружности ω с прямой (AB) проведем касательные к ω, и пусть O – их точка пересечения. Пусть прямые (OA) и (OB) пересекают окружность ω в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. При этом нумерацию этих точек выберем так, что A_1 и B_1 лежат по одну, а A_2 и B_2 –*

по другую сторону от прямой (AB). *Тогда*

$$P = (A_1B_2) \cap (B_1A_2).$$

б) Более того, как следует из задачи 5 семинара 2 ("Коники"), следует, что прямые (A_1B_1) *и* (A_2B_2) *пересекаются в точке* Q *на прямой* (AB), *лежащей вне отрезка* $[XY]$, *такой, что пара точек* P, Q *гармонически делит две пары точек* A, B *и* X, Y. *Согласно следствию к задаче 17 семинара 2 пара точек* P, Q *с таким свойством единственна.*

Определение. В силу последнего свойства будем также называть точку P *ω-серединой отрезка* $[AB]$. Соответственно, прямую (CP) в треугольнике ABC будем называть *ω-медианой треугольника* ABC.

Замечание 2. *В предыдущих обозначениях перпендикуляр к прямой* (AB), *проходящий через произвольную точку* Z *плоскости Лобачевского* Π *есть прямая* (OZ). *(См. доказательство в задаче 5.)*

Для доказательства теоремы о медианах треугольника в плоскости Лобачевского нам потребуется следующая задача.

Задача 3. *В плоскости Лобачевского с абсолютом* ω *дан треугольник* ABC. *Пусть* A' – ω*-середина отрезка* $[BC]$, *а* B' – ω*-середина отрезка* $[AC]$. *Возьмем точку* A_1 *на прямой* (BC) *и точку* B_1 *на прямой* (AC) *такие, что пара* A', A_1 *гармонически делит пару* B, C, *а пара* B', B_1 *гармонически делит пару* A, C. *Пусть* C_1 – *точка пересечения прямых* (AB) *и* (A_1B_1), *и* C' – *точка отрезка* $[AB]$ *такая, что пара* C', C_1 *гармонически делит пару* A, B. *Тогда пара* C', C_1 *гармонически делит пару* R, S *точек пересечения прямой* (AB) *с коникой* ω, *то есть* C' *является* ω*-серединой отрезка* $[AB]$.

Решение. Проведем вычисление в аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$, в которой (A_1B_1) есть бесконечно удаленная прямая, точка A' взята в качестве начала координат O, прямая $(BC) = (OA_1)$ в качестве оси Ox, а прямая $(A'C') = ()C')$ в качестве оси Oy. Так как по условию пара O, A_1 гармонически делит пару B, C, а A_1 – бесконечно удаленная точка, то точка O – середина отрезка $[BC]$, и можно выбрать масштаб на оси Ox так, что отрезки $[BO]$ и $[OC]$ будут иметь единичную длину, то есть положить

$$B = (-1, 0), \quad C = (1, 0). \tag{22}$$

Аналогично, так как по условию пара C', C_1 гармонически делит пару A, B, а C_1 – бесконечно удаленная точка, то точка C' – середина отрезка $[AB]$. По той же причине и точка B' – середина отрезка $[AC]$. Поэтому можно выбрать масштаб на оси Oy так, что отрезки $[AB']$ и $[B'C]$ будут иметь единичную длину, то есть положить

$$B' = (1, 1), \quad A = (1, 2), \quad C' = (0, 1). \tag{23}$$

Пусть $\{X, Y\} = (Ox) \cap \omega$, $\{P, Q\} = (Oy) \cap \omega$. Так как по условию пара O, A_1 гармонически делит пару X, Y, пара B', B_1 гармонически делит пару P, Q, а A_1 и B_1 – бесконечно удаленные точки, то найдутся вещественные числа $a > 1$ и $b > 0$, что

$$X = (-a, 0), \quad Y = (a, 0), \quad P = (1, b + 2), \quad Q = (1, -b). \tag{24}$$

Рассмотрим две коники $\mathcal{C}_1 = (PQ) \cup (XY)$ и $\mathcal{C}_2 = (QY) \cup (PX)$, принадлежащие пучку с базисными точками X, Y, P, Q. Заметим, что коника ω содержит точки X, Y, P, Q, а значит, принадлежит этому пучку. Далее, пользуясь (22)-(24), находим $\mathcal{C}_1 = \{F_1 = 0\}$, $\mathcal{C}_2 = \{F_2 = 0\}$, где

$$F_1 = y(x - 1), \quad F_2 = ((1 + a)y - (b + 2)(x + a))((a - 1)(y + b) - b(x - 1)). \tag{25}$$

Ограничивая линейную комбинацию $F := \lambda F_1 + F_2$ форм F_1 и F_2 на прямую (AB) с уравнением $y = x + 1$, находим уравнение пучка квадрик на прямой (AB):

$$F|_{\{y=x+1\}} = \lambda(x+1)(x-1) + \Big((a+1)(x+1) - (b+2)(x+a)\Big)\Big((a-1)(x+1) - b(x-1) + (a-1)b\Big) = x^2(\lambda + (a-b-1)^2) - (\lambda + (a-1+ab)^2), \tag{26}$$

то есть уравнение $x^2 - \tilde{\lambda} = 0$, где $\tilde{\lambda} = (\lambda + (a-1+ab)^2)/(\lambda + (a-b-1)^2)$. Последнее уравнение показывает, что получаемый пучок квадрик определяет на (AB) инволюцию с неподвижными точками C' и C_1. Напомним, что по построению пара A, B гармонически делит пару C', C_1. С другой стороны, так как коника ω принадлежит пучку $< \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 >$, то пара R, S, высекаемая ею на прямой (AB), принадлежит указанной инволюции, а значит, также гармонически делит пару C', C_1. Это по определению означает, что C' есть ω-середина отрезка $[AB]$. □

Задача 3$'$. *Найдите синтетическое решение задачи 3.*

Теорема 3. *В треугольнике ABC в плоскости Лобачевского три ω-медианы пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC точки A' и B' – ω-середины сторон BC и AC соответственно, и O – точка пересечения ω-медиан AA' и BB'. Рассмотрим пучок коник L с базисными точками O, A, B, C. В этом пучке имеются три распавшиеся коники

$$\mathcal{C}_a = (BC) \cup (AA'), \quad \mathcal{C}_b = (AC) \cup (BB'), \quad \mathcal{C}_c = (AB) \cup (CO).$$

Как и в условиях задачи 3, возьмем точку A_1 на прямой (BC) и точку B_1 на прямой (AC) такие, что пара A', A_1 гармонически делит пару B, C, а пара B', B_1 гармонически делит пару A, C. Пусть C_1 – точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1). Определим теперь на прямой (A_1B_1) еще три точки A'', B'', C'' из условий:

$$\{A'', A_1\} = \mathcal{C}_a \cap (A_1B_1), \quad \{B'', B_1\} = \mathcal{C}_b \cap (A_1B_1), \quad \{C'', C_1\} = \mathcal{C}_c \cap (A_1B_1).$$

Проекция из центра O и гармоничность вышеуказанных пар точек показывает, что

$$(A''A_1, B_1C_1) = (A'A_1, BC) = -1, \quad (B''B_1, A_1C_1) = (B'B_1, AC) = -1,$$

то есть пара $A''A_1$ гармонически делит пару B_1C_1, а пара $B''B_1$ гармонически делит пару A_1C_1. Так как коники $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$, $\mathcal{C}_c$ принадлежат одному пучку, то отсюда и из задачи 19(2) семинара 2 ("Коники") следует, что и пара $C''C_1$ гармонически делит пару A_1B_1. Поэтому снова проекция из центра O показывает, что пара C', C_1, где

$$C' = (CO) \cap (AB).$$

гармонически делит пару A, B. Но тогда согласно задаче 3 точка C' – ω-середина отрезка $[AB]$, то есть прямая $(CC') = (CO)$ – ω-медиана. □

Задача 4 *(Теорема Плюккера о полярно сопряженных треугольниках).*
Если вершины одного треугольника являются полюсами соответственных сторон другого относительно некоторого конического сечения, то такие треугольники перспективны.

Решение. Рассмотрим коническое сечение. Пусть каждая вершина треугольника $A_1B_1C_1$ является полюсом соответственной стороны треугольника ABC (см. рис. ниже). Докажем, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Если фиксировать вершины A_1 и B_1, а C_1 перемещать по прямой B_1C_1, то поляра AB этой вершины опишет пучок (A) с центром A, высекая на BC прямолинейный ряд (BC) точек, проективный прямолинейному ряду (B_1C_1), который пробегает C_1. Пучки прямых (B_1) и (C), соответственно перспективные проективным прямолинейным рядам (BC) и (B_1C_1), проективны. Кроме того, общая прямая CB_1 этих пучков сама себе соответствует. Поэтому пучки (B_1) и (C) перспективны. Прямая AA_1 является осью перспективы, так как прямая CA пучка (C) соответствует прямой B_1A пучка (B_1), а прямая CA_1 – прямой B_1A_1. В самом деле, полярой точки $M = CA \cap B_1C_1$ является прямая AB_1, а поэтому в установленном с помощью пучка (A) проективном соответствии рядов (BC) и (B_1C_1) точке M ряда (B_1C_1) соответствует точка $K = BC \cap AB_1$, а значит, прямой $CM = CA$ пучка (C) соответствует прямая $B_1K = B_1A$ пучка (B_1). Соответствие прямых CA_1 и B_1A_1 в этих пучках доказывается аналогично. Поскольку прямые CC_1 и B_1B являются соответственными в перспективных пучках, то они пересекаются на оси перспективы AA_1.

(Это решение взято из книги З.А.Скопеца и Я.П.Понарина ″Геометрия тетраэдра″, Ярославль, ЯГПИ, 1974.) □

Другое решение. Оно основано на следующем утверждении:

(*) *Если две пары противоположных вершин полного четырехсторонника сопряжены относительно коники C, то и третья пара его противоположных вершин сопряжена относительно C.*

Доказательство (*). Пусть A, A', B, B', C, C' – три пары противоположных вершин полного четырехсторонника (см. рис.):

Возьмем A, B, C в качестве точек $E_0 = (1:0:0)$, $E_1 = (0:1:0)$, $E_2 = (0:0:1)$ проективного репера, а прямую $A'B'C'$ в качестве единичной прямой $x_0 + x_1 + x_2 = 0$, так что $A' = (0:1:-1)$, $B' = (1:0:-1)$, $C' = (1:-1:0)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение коники $\sum a_{ik}x_ix_k = 0$, получаем, что условия сопряженности точек A и A', B и B', C и C' имеют вид соответственно: $a_{01} = a_{02}$, $a_{01} = a_{12}$, $a_{02} = a_{12}$. Любые два из этих равенств влекут третье, откуда вытекает утверждение (*).

Теперь перейдем к решению задачи 4. Пусть ABC – данный треугольник, и пусть $A'B'C'$ – полярный ему треугольник относительно коники. Пусть (BC) и $(B'C')$ пересекаются в точке P, а (BB') и (CC') – в точке O (см. рис).

Так как по условию пары точек B и C, B' и C сопряжены относительно коники, то и пара O и P сопряжена относительно коники. Поэтому поляра (AA') точки P содержит точку O, что и требовалось доказать. $\square$

Задача 5. *В треугольнике ABC в плоскости Лобачевского высота h_C через точку C строится как прямая $h_C = (CC')$, где C' – полюс прямой (AB) относительно ω. Тем самым, прямая h_C сопряжена прямой (AB) относительно окружности ω.*

Указание к решению. Это следствие формулы для угла между прямыми $l = (AB)$ и $m = (CC_1)$, где $C_1 = (CC') \cap (AB)$ в плоскости Лобачевского:

$$\widehat{l,m} = \frac{1}{2i}\ln(lm, n_1n_2),$$

где n_1 и n_2 – (мнимые) касательные прямые к ω, проходящие через точку C_1. Действительно, так как l и m сопряжены относительно ω, двойное отношение (lm, n_1n_2) равно -1, и поэтому вышеуказанная формула дает $\widehat{l,m} = \frac{1}{2i}\ln(-1) = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Теорема 4 *Три высоты в треугольнике на плоскости Лобачевского пересекаются в точке.*

Решение. Пусть ABC – треугольник и A', B' и C' – полюсы прямых (BC), (AC) и (AB) соответственно относительно ω. Согласно задаче 5 прямые $h_A = (AA')$, $h_B = (BB')$ и $h_C = (CC')$ являются высотами в треугольнике ABC. Но по построению треугольники ABC и $A'B'C'$ полярно сопряжены относительно ω, а значит, перспективны ввиду теоремы Плюккера (задача 4), то есть высоты h_A, h_B и h_C пересекаются в точке. $\square$