Листок 3. *Срок сдачи — 11 декабря.*

Дивизоры Вейля и группа классов

Задача 1. Для действия тора $(t_1, t_2).(x_1, x_2, x_3) = (t_1x_1, t_1t_2x_2, t_1t_2^2x_3)$ на многообразии $x_2^2 = x_1x_3$ построить веер, предъявить все орбиты тора, указать соответствующие конуса. Какие $\mathbb{T}$-инвариантные дивизоры Вейля есть на этом многообразии?

Задача 2. Посчитать группу классов поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_a$.

Задача 3. Посчитать группу классов взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(d_0, d_1, \ldots, d_n)$.

Корни Демазюра и орбиты.

Задача 4. * Пусть $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ – корень Демазюра и H_e — соответствующая однопараметрическая унипотентная подгруппа (экспонента дифференцирования ∂_e). Тогда

a) Для любой точки $x \in X$, не оставляемой на месте этим действием, орбита $H_e.x$ пересекает в точности две $\mathbb{T}$-орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ на X, причём $\dim \mathcal{O}_1 = 1 + \dim \mathcal{O}_2$.

b) Пересечение $\mathcal{O}_2 \cap H_e.x$ состоит из единственной точки, а

$$\mathcal{O}_1 \cap H_e.x \ = \chi^{\rho_e}.y \qquad \forall y \in \mathcal{O}_1 \cap H_e.x\,.$$

Дивизоры Картье

Задача 5. Пусть σ – конус в $\mathbb{Z}^2$, порождённый векторами $(2, -1)$ и $(-1, 2)$. Обозначим через D_1 и D_2 дивизоры Вейля на соответствующем торическом многообразии U_σ, соответствующие этим примитивным векторам. Покажите, что $a_1D_1 + a_2D_2$ является дивизором Картье на U_σ тогда и только тогда, когда $a_1 \equiv a_2 (mod\, 3)$.

Задача 6. Пусть σ – конус в $\mathbb{Z}^3$, порождённый векторами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, -1, 1)$. Покажите, что $a_1D_1 + a_2D_2 + a_3D_3 + a_4D_4$ является дивизором Картье на U_σ тогда и только тогда, когда $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$.

Задача 7. Рассмотрим натуральные числа a, b, $a > 1$, $\gcd(a, 2b) = 1$. В ситуации предыдущей задачи заменим решётку $\mathbb{Z}^3$ на $N = \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2b}e_1 + \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{b}e_2 + \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{a}e_3 + \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2b}(e_1 + e_2 + e_3)$.

a) Найдите примитивные векторы на рёбрах σ.

b) Какие дивизоры Вейля $a_1D_1 + a_2D_2 + a_3D_3 + a_4D_4$ являются дивизорами Картье?

c) Покажите, что никакой кратный дивизора $D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ не является дивизором Картье.

Определение. *Для дивизора Картье $D = \sum a_iD_i$ определим полиэдр (если повезёт – то даже многогранник)*

$P_D = \{m \in M_Q \mid \langle m, \rho_i \rangle \geqslant -a_i$ *для всех одномерных конусов веера*$\}$, ρ_i – *примитивный вектор.*

Задача 8. Пусть D, E – дивизоры Картье на торическом многообразии X.

a) Покажите, что $P_D + P_E \subseteq P_{D+E}$.

b) Если X полное и $\mathcal{O}(D)$, $\mathcal{O}(E)$ порождены глобальными сечениями, покажите, что

$$P_D + P_E = P_{D+E}.$$

Задача 9. Раздуем $\mathbb{P}^n$ в неподвижной относительно $\mathbb{T}$ точке. Для каких дивизоров Картье D на полученном многообразии X пучок $\mathcal{O}_X(D)$ порождён глобальными сечениями?