Листок 06. Срок сдачи 11 декабря 2015

Для сдачи каждой из задач 6.1 — 6.6 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

06.01. Формула Тейлора.

а) Докажите, что если функция $f^{(n)}(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $f(x)$ – многочлен степени меньше n.

б) Докажите формулу Тейлора для многочленов: если $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, то при любом $x_0 \in \mathbb{R}$

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

в) Функция f определена в окрестности нуля, дифференцируема в нуле n раз и $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$. Докажите, что $f(x) = o(x^n)$, $x \to 0$.

г) Докажите, что для n раз дифференцируемой в точке x_0 функции имеет место формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \qquad x \to x_0$$

(Это формула Тейлора с остаточным членом $r_n(x_0, x)$ в форме Пеано).

06.02. Формула Тейлора (продолжение) Пусть функция f дифференцируема $n + 1$ раз на промежутке $[x_0, x]$. Положим

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right].$$

а) Вычислите $F'(t)$.

б) Примените к паре функций $F(t)$ и $x - t$ теорему Коши (которая обобщает формулу Лагранжа) на промежутке $[x_0, x]$ и получите отсюда формулу Коши остаточного члена в формуле Тейлора

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x_0 - \xi)^n (x - x_0).$$

в) Примените к паре функций $F(x)$ и $x_0 - x$ теорему Коши на промежутке $[x_0, x]$ и получите отсюда формулу Лагранжа остаточного члена в формуле Тейлора

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

06.03. Ряды Тейлора для основных элементарных функций Для доказательства используем оценки остаточного члена из предыдущей задачи.

а) Выведите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n - 1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

б) Выведите следующие равенства и объясните, для каких значений x они справедливы:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \qquad (x + 1)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

06.04.

а) Проверьте, что $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём $f^{(n)}(0) = 0$ при всех натуральных n.

б) Нарисуйте эскизы графиков функций f, f' и f''.

в) Приведите пример всюду бесконечно дифференцируемой функции, равной нулю вне заданного интервала и отличной от нуля внутри него.

06.05. Представьте формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x + x^2|x|$ до $o(x^n)$. Какие значения может принимать n?

06.06. Пусть f бесконечно дифференцируемая в окрестности нуля функция, для которой справедливо разложение

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + O(x^{n+1}).$$

Найдите формулу Маклорена для функции f с точностью до $o(x^{n+1})$.

06.07.* Пусть $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$ $(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{h \to 0} \theta = (n+1)^{-1}$.

06.08.* Пусть функция f определена и дифференцируема на $\mathbb{R}^+$.

Докажите, что если $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$, то $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.