Дискретная математика
Семинар 1
ВШЭ, факультет математики
первый курс

1. Сколько подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ содержит хотя бы одно нечётное число?

2. Сколькими способами можно упорядочить буквы в слове MISSISSIPPI таким образом, чтобы четыре буквы S не стояли подряд?

3. Сколько существует функций $f : \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\}$, таких что $\# f^{-1}(k) \leq 2$ для всех $k = 1, \ldots, 5$?

4. Докажите (по-возможности, комбинаторно) следующие равенства:

$$\text{а). } \sum_{i=0}^{n} \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n},$$

$$\text{б). } \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1},$$

$$\text{в)}^*. \sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i} = 4^n.$$

5. а). Сколько существует путей на плоскости из точки $(0,0)$ в точку (n_1, n_2), $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, состоящих из отрезков $(1,0)$ и $(0,1)$?
б). Обобщите пункт а) на высшие размерности (пути в d-мерном пространстве).

6. а). Пусть p – простое число, $n = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$, $m = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$ – p-ичные разложения чисел n и m. Покажите, что

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \ldots \mod p.$$

б). При каких n, m биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$ нечётный? При каких n все биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$ нечётны?

7. Назовём разложением числа n равенство вида $n = a_1 + \cdots + a_k$, $a_i > 0$. Например, число 3 имеет ровно 4 разложения $3 = 3$, $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 2$, $3 = 1 + 1 + 1$. Числа a_i называются частями разложения.
а). Найдите число разложений числа n.
б). Найдите число разложений числа n, имеющих чётное число чётных частей.