Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах

Содержание

Вводные замечания

История квантовых интегрируемых систем началась в 1931 году, когда Г.Бете удалось построить точные собственные функции гамильтониана спиновой цепочки Гейзенберга с помощью специальной подстановки, с тех пор ставшей знаменитой и носящей теперь его имя (анзац Бете). В том или ином виде этот метод оказался применим ко множеству других интегрируемых моделей – как спиновых, так и теоретико-полевых. С математической точки зрения метод Бете связан с теорией представлений квантовых алгебр (q-деформаций универсальных обертывающих алгебр Ли и янгианов).

Хотя за прошедшие годы была предложена масса различных обобщений и вариантов метода Бете, секрет его удивительной эффективности и универсальности до конца не раскрыт до сих пор.

Предлагаемые лекции содержат изложение следующих вопросов.

- Координатный анзац Бете на примере модели Гейзенберга и модели одномерного бозе-газа с парным точечным взаимодействием между частицами;
- Анзац Бете в точно решаемых моделях статистической механики на решетке на примере 6-вершинной модели;
- Уравнения Бете и функция Янга-Янга, вычисление нормы бетевских векторов;
- Квантовый метод обратной задачи и алгебраический анзац Бете, квантовые R-матрицы, уравнение Янга-Бакстера;
- Функциональный анзац Бете и метод Q-операторов Бакстера, функциональные соотношения для трансфер-матриц, трансфер-матрицы как тау-функции.

Знание основ квантовой механики и статистической физики для их понимания весьма желательно, но не категорически необходимо. Вне физического контекста анзац Бете в своем конечномерном варианте – это просто метод диагонализации больших матриц специального вида, и в этом смысле не требует никаких предварительных знаний кроме основ линейной алгебры.

1 Координатный анзац Бете

1.1 Анзац Бете в модели Гейзенберга

1.1.1 Обозначения и терминология

Матрицы Паули. Матрицы Паули – это 2×2 матрицы следующего вида:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Они образуют удобный базис в пространстве эрмитовых 2×2 матриц с нулевым следом. Для них используются также обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а единичная матрица иногда обозначается как σ_0. Для краткости мы иногда будем писать просто 1 вместо единичной матрицы. Основные свойства матриц Паули таковы:

1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$,

2) $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$,

3) $\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j$ при $j \neq k$.

Матрицы Паули удобно объединить в 3-вектор с матричными компонентами: $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Ниже под $\vec{\sigma}$ будем иметь в виду совокупность всех трех матриц Паули. Часто используются также матрицы

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$, $[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$ и $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$.

В $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ справедливо равенство

$$\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z = 2P_{12} \tag{1.1}$$

где P_{12} – оператор перестановки тензорных сомножителей. На векторы он действует так: если u, v – любые два вектора из $\mathbb{C}^2$, то $P_{12}\,(u \otimes v) = v \otimes u$. Эквивалентным образом, если X, Y – любые операторы из $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^2)$, то $P_{12}\, X \otimes Y = Y \otimes X\, P_{12}$. Если ввести обозначения $\vec{\sigma}^{(1)} = \vec{\sigma} \otimes 1$, $\vec{\sigma}^{(2)} = 1 \otimes \vec{\sigma}$, тождество (1.1) можно записать также в виде

$$P_{12} = \frac{1}{2}\,(1 + \vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}) \tag{1.2}$$

(здесь $\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$ понимается как скалярное произведение "векторов" $\vec{\sigma}^{(1)}$ и $\vec{\sigma}^{(2)}$, т.е. сумма произведений одноименных компонент). Удобно также ввести подобные этим обозначения и в случае, когда тензорных сомножителей больше, чем два. Именно, определим операторы $\vec{\sigma}^{(j)} \in \mathrm{End}\,(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ раз}})$ следующим образом:

$$\vec{\sigma}^{(j)} = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{j-1} \otimes \vec{\sigma} \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{N-j}$$

Очевидно, если номера j и k различны, компоненты вектора $\vec{\sigma}^{(j)}$ коммутируют с компонентами $\vec{\sigma}^{(k)}$, поскольку нетривиально действуют в разных пространствах.

Пространство состояний. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ раз}}$$

Будем называть его *пространством состояний.* (Состояние – это любой вектор из $\mathcal{H}$. Если два вектора отличаются умножением на комплексное число, они задают одно и то же состояние.)

В квантовой механике это пространство состояний системы из n неподвижных атомов, обладающих магнитными моментами, которые мы для краткости будем называть *спинами.* (Остальные степени свободы, которыми может обладать атом, в этой упрощенной картине не учитываются.) Пространство состояний каждого спина двумерно (спин $\frac{1}{2}$).

Выберем базис в $\mathbb{C}^2$ следующим образом:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В состоянии $|+\rangle$ z-проекция спина равна $+1$ (стрелка вверх). Аналогично, в состоянии $|-\rangle$ z-проекция спина равна -1 (стрелка вниз). Для краткости мы будем говорить, что в первом случае спин направлен вверх, а во втором вниз. Все остальные квантовомеханические состояния, в которых может находиться спин, являются линейными комбинацией этих двух с комплексными коэффициентами. В таких состояниях проекция спина на ось z, вообще говоря, не имеет определенного значения. Матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – это операторы проекций спина на оси x, y, z (более точно, в физике оператором спина $1/2$ называется не $\vec{\sigma}$, а $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$, при этом возможные значения проекций спина равны $\pm\frac{1}{2}$). Поскольку они не коммутируют, определенное значение ($+1$ или -1) может иметь проекция спина только на одну какую-то ось. Мы, очевидно, имеем: $\sigma_z |+\rangle = |+\rangle$, $\sigma_z |-\rangle = -|-\rangle$.

Базисные векторы в $\mathcal{H}$ естественно выбрать в виде тензорных произведений базисных векторов в каждом тензорном сомножителе. Например:

$$|+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |-\rangle \otimes \ \ldots \ \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle$$

что мы будем также записывать как

$$|+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 |+\rangle_4 |-\rangle_5 |-\rangle_6 \ \ldots \ |-\rangle_{N-1} |+\rangle_N$$

или просто $|++-+-- \ \ldots \ -+\rangle$. Это состояние, в котором первый спин имеет z-проекцию $+1$, второй $+1$, третий -1 и т.д. Всего таких векторов будет 2^N, т.е. $\dim \mathcal{H} = 2^N$.

Наконец, введем в $\mathcal{H}$ скалярное произведение (с его помощью будут выражаться физические величины). Для этого в каждом пространстве $\mathbb{C}^2$ зададим скалярное произведение естественной формулой $\langle \epsilon | \, \epsilon' \rangle = \delta_{\epsilon,\epsilon'}$, где $\epsilon, \epsilon' = \pm$ и продолжим его на их тензорное произведение по правилу

$$\langle \epsilon_1 \epsilon_2 \ldots \epsilon_n | \, \epsilon'_1 \epsilon'_2 \ldots \epsilon'_n \rangle = \prod_{i=1}^{N} \delta_{\epsilon_i, \epsilon'_i}$$

Оператор полного спина и разбиение пространства состояний на сектора. Оператор

$$\vec{S} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\sigma}^{(j)}$$

по понятной причине называется оператором полного спина системы атомов. По аналогии можно ввести также $S_\pm = \frac{1}{2}(S_x \pm i S_y)$. Коммутационные соотношения для этих операторов, очевидно, такие же, как для матриц Паули, т.е. $[S_z, S_\pm] = \pm 2S_\pm$, $[S_+, S_-] = S_z$, но S_x^2, S_y^2, S_z^2, конечно, уже не равны единичным операторам, как и $S_\pm^2 \neq 0$.

Легко видеть, что все базисные векторы в $\mathcal{H}$, в которых m спинов смотрят вниз, а остальные $N-m$ вверх (независимо от порядка их расположения), являются собственными для оператора S_z с собственным значением $N-2m$. В соответствии с этим пространство $\mathcal{H}$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{H}(m)$ при $m = 0, 1, 2, \ldots, N$, на которых z-проекция полного спина равна $N-2m$:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{N} \mathbb{C}^2 = \bigoplus_{m=0}^{N} \mathcal{H}(m) \tag{1.3}$$

Легко найти, что

$$\dim \mathcal{H}(m) = \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

В частности, $\mathcal{H}(0)$ и $\mathcal{H}(N)$ – одномерные пространства, порождаемые, соответственно, состоянием, в котором все спины смотрят вверх (вниз). О разложении (1.3) говорят как о разбиении полного пространства состояний на сектора с фиксированной проекцией полного спина.

Отметим, что операторы $\sigma_z^{(j)}$ переводят каждое из подпространств $\mathcal{H}(m)$ в себя, а операторы $\sigma_\pm^{(j)}$ действуют так: $\sigma_\pm^{(j)} : \mathcal{H}(m) \to \mathcal{H}(m \mp 1)$.

1.1.2 Изотропный магнетик Гейзенберга (XXX-модель)

Основная задача состоит в диагонализации следующего оператора из $\mathrm{End}(\mathcal{H})$:

$$H(J_x, J_y, J_z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (J_x \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + J_y \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)} + J_z \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)}), \quad \vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)} \tag{1.4}$$

который можно понимать как $2^N \times 2^N$-матрицу специального вида. Физический интерес представляет нахождение его собственных чисел и собственных векторов в пределе $N \to \infty$ (так называемом термодинамическом пределе).

Данный оператор служит квантовомеханической моделью цепочки одинаковых атомов, обладающих магнитными моментами (спинами). Каждый спин приписан к своему узлу (атому) в цепочке. Отождествление $\vec{\sigma}^{(N+1)} \equiv \vec{\sigma}^{(1)}$ означает наложение периодических граничных условий (замкнутая цепочка). Взаимодействуют между собой только ближайшие соседи. Сила взаимодействия характеризуется константами J_x, J_y, J_z.

Эта модель была предложена (в частном случае $J_x = J_y = J_z$) одним из создателей квантовой механики В.Гейзенбергом в 20-х годах 20-го века. Оператор $H(J_x, J_y, J_z)$ называется *гамильтонианом* модели. Его собственные числа (спектр) – это возможные значения энергии, которой может обладать данная система спинов.

Случай, когда только одна из констант отлична от 0 (например, $J_x = J_y = 0$, $J_z \neq 0$) легко сводится к одномерной модели Изинга, которая может быть полностью решена элементарными методами. Случай, когда две константы из трех отличны от

0, также эквивалентен модели Изинга, но двумерной, полное решение которой уже нетривиально.

В теории интегрируемых систем принята следующая терминология. Если модель анизотропна (т.е. $J_x \neq J_y \neq J_z$), она называется XYZ-магнетиком, если $J_x = J_y \neq J_z$ – XXZ-магнетиком, и, наконец, если взаимодействие одинаково для всех трех направлений, т.е. $J_x = J_y = J_z$, – XXX-магнетиком (или, соответственно, XYZ-, XXZ-, XXX-моделью). Мы будем в основном заниматься XXX-моделью.

С чисто алгебраической точки зрения константы J_x, J_y, J_z могут быть любыми числами, в том числе комплексными. Важное физическое требование состоит, однако, в том, чтобы оператор $H(J_x, J_y, J_z)$ был эрмитовым, а его собственные значения тем самым были бы вещественными. Тогда константы J_x, J_y, J_z должны быть вещественными. Их знаки опять-таки не важны для алгебраических методов, но физические свойства модели могут существенно зависеть от того, положительны они или отрицательны. В следующей задаче предлагается показать, что при некоторых различных выборах знаков получаются унитарно эквивалентные операторы, что позволяет без потери общности ограничиться анализом случаев, в которых константы либо все отрицательны (ферромагнетик), либо все положительны (антиферромагнетик).

Задача. Пусть число узлов N четно. Показать, что

$$H(J_x, J_y, -J_z) = -\mathcal{U}_z H(J_x, J_y, J_z)(\mathcal{U}_z)^{-1}$$

где $\mathcal{U}_z = \sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(6)}\dots\sigma_z^{(N)}$. Сформулировать и доказать аналогичные свойства для x- и y-направлений.

Вопрос. Можно ли сформулировать аналогичные утверждения в случае нечетного числа узлов?

Задача. Найти спектр гамильтониана XYZ-модели Гейзенберга для $N = 2$:

$$H = J_x\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + J_y\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)} + J_z\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$$

Отдельно рассмотреть случай изотропной XXX-модели ($J_x = J_y = J_z = J$).

Ниже мы подробно рассмотрим XXX-модель. Метод нахождения собственных векторов и спектра гамильтониана для нее был предложен в 1931 г. Гансом Бете (анзац Бете). Роль этого метода в теории интегрируемых систем выходит далеко за рамки конкретной модели.

Гамильтониан XXX-магнетика Гейзенберга возьмем в виде

$$\boxed{H^{\rm xxx} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\right)}$$

По сравнению с (1.4) добавлен последний член, пропорциональный тождественному оператору. Это просто сдвигает спектр как целое на константу. Общий множитель выбран равным $-\frac{1}{2}$ (знак соответствует ферромагнитному случаю), но при необходимости множитель J может быть восстановлен заменой $H^{\rm xxx} \to H^{\rm xxx}/J$. Данный оператор можно представить в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{xxx}} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)}+\sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)}+\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}-1\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(2\sigma_+^{(k)}\sigma_-^{(k+1)}+2\sigma_-^{(k)}\sigma_+^{(k+1)}+\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)}-1\right) \qquad (1.5) \\ &= -\sum_{k=1}^{N}P_{k,k+1}\,+\,N \end{aligned}$$

В последней строчке $P_{k,k+1}$ – это оператор, переставляющий k-й и $k+1$-й множители в тензорном произведении (аналогично оператору (1.2)), причем $P_{N,N+1}\equiv P_{N,1}$.

Задача. Доказать, что все собственные значения оператора H^{xxx} неотрицательны. (Подсказка: использовать тождество $\frac{1}{4}(1-\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)})^2=1-\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}$.)

1.1.3 Построение собственных векторов в XXX-модели

Два собственных вектора оператора H^{xxx} найти очень легко. Из представления гамильтониана XXX-модели в виде $H^{\mathrm{xxx}}=-\sum\limits_{k=1}^{N}P_{k,k+1}\,+\,N$ (последняя строчка в (1.5)) сразу следует, что векторы $|\Omega\rangle:=|++++\,\ldots\,+\rangle$, $\left|\bar{\Omega}\right\rangle:=|----\,\ldots\,-\rangle$ являются для него собственными с собственным значением 0:

$$H^{\mathrm{xxx}}\,|\Omega\rangle=H^{\mathrm{xxx}}\left|\bar{\Omega}\right\rangle=0$$

Дальнейшая процедура предполагает, что мы выберем какой-нибудь один из них, например, $|\Omega\rangle$ (все спины вверх), а про существование второго на долгое время забудем. Физики называют вектор $|\Omega\rangle$ *вакуумом* (часто голым или ложным), и построение остальных собственных состояний гамильтониана интерпретируют как рождение в вакууме каких-то "возбуждений" или "квазичастиц".

Важное замечание, позволяющее упростить процедуру нахождения остальных собственных векторов, состоит в том, что гамильтониан изотропной модели Гейзенберга коммутирует с оператором z-проекции полного спина:

$$[H^{\mathrm{xxx}},\,S_z]=0 \qquad (1.6)$$

(это верно и для XXZ-модели, но не верно для XYZ). Опять-таки это легче всего проверить, пользуясь представлением гамильтониана в виде суммы операторов перестановки. Более того, в XXX-модели в силу равноправия всех трех направлений верно также, что

$$[H^{\mathrm{xxx}},\,\vec{S}]=0 \qquad (1.7)$$

(это уже не так для XXZ). Следствия этой глобальной $SU(2)$-инвариантности мы обсудим позднее, а пока нам нужна будет только инвариантность относительно картановской подгруппы $U(1)$, выражаемая соотношением (1.6). Из него следует, что операторы H^{xxx} и S_z имеют общие собственные вектора. А это значит, что собственные векторы H^{xxx} всегда имеют определенную z-проекцию спина, т.е. их можно искать отдельно в каждом секторе $\mathcal{H}(m)$ разложения (1.3). Мы уже видели это на простейшем примере: $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}(0)$.

Выше было отмечено, что спектр оператора $H^{\rm xxx}$ неотрицателен. Отсюда и из результата следующей ниже задачи заключаем, что основное состояние имеет $E = 0$ и как минимум N-кратно вырождено.

Задача. Показать, что $H^{\rm xxx}\,|\Omega_m\rangle = 0$, $S_z\,|\Omega_m\rangle = (N-2m)\,|\Omega_m\rangle$, где $|\Omega_m\rangle = S_-^m\,|\Omega\rangle$. Как устроены векторы $|\Omega_m\rangle$?

Обратим внимание на то, что кроме проекций полного спина имеется еще один оператор, коммутирующий с гамильтонианом, – это оператор e^{iP} сдвига на узел, действующий на базисные векторы сдвигом на один шаг решетки:

$$e^{iP}\,|\epsilon_1\rangle_1\,|\epsilon_2\rangle_2\,|\epsilon_3\rangle_3\,|\epsilon_4\rangle_4\ \ldots\ |\epsilon_{n-1}\rangle_{N-1}\,|\epsilon_n\rangle_N = |\epsilon_2\rangle_1\,|\epsilon_3\rangle_2\,|\epsilon_4\rangle_3\,|\epsilon_5\rangle_4\ \ldots\ |\epsilon_N\rangle_{N-1}\,|\epsilon_1\rangle_N$$

где $\epsilon_i = \pm$. С операторами $\vec{\sigma}^{(j)}$ он коммутирует по правилу $e^{iP}\,\vec{\sigma}^{(j+1)} = \vec{\sigma}^{(j)}e^{iP}$. Очевидно, оператор сдвига коммутирует с операторами проекций полного спина. Собственное значение оператора P физики называют квазиимпульсом. В дальнейшем мы для простоты будем называть его просто импульсом.

Итак, мы будем искать общие собственные состояния операторов $H^{\rm xxx}$, e^{iP} и S_z. Другими словами, будем искать стационарные состояния системы спинов с определенными значениями импульса и z-проекции полного спина.

Один перевернутый спин. Следующий по сложности (хотя тоже очень простой) случай – N-мерное подпространство $\mathcal{H}(1) \subset \mathcal{H}$ (один перевернутый спин), в котором должно быть N собственных векторов. Базисные векторы $\mathcal{H}(1)$ получаются действием операторов $\sigma_-^{(j)}$ на вектор $|\Omega\rangle$. Будем искать собственные векторы оператора $H^{\rm xxx}$ в виде

$$|\Psi^{(1)}\rangle = \sum_{k=1}^{N} a(k)\,\sigma_-^{(k)}\,|\Omega\rangle$$

где $a(k)$ – неизвестные пока коэффициенты, удовлетворяющие условию периодичности $a(k+N) = a(k)$. Физики называют $a(k)$ одночастичной волновой функцией (в координатном представлении), а ее значение в узле k – амплитудой вероятности переворота k-го спина. Введем временное обозначение $\sigma_-^{(j)}\,|\Omega\rangle = |j\rangle$. Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{P} \equiv \sum_k P_{k,k+1}$ переводит вектор $|j\rangle$ в

$$(N-2)\,|j\rangle + |j+1\rangle + |j-1\rangle = N\,|j\rangle + |j+1\rangle + |j-1\rangle - 2\,|j\rangle\,,$$

так что секулярное уравнение $H^{\rm xxx}V = EV$ с собственным значением E эквивалентно следующему линейному разностному уравнению на коэффициенты $a(k)$:

$$-a(k+1) - a(k-1) + 2a(k) = Ea(k) \tag{1.8}$$

Решение можно искать в виде $a(k) = e^{ipk}$ с $0 \le p < 2\pi$, тогда

$$|\Psi^{(1)}\rangle = |\Psi^{(1)}(p)\rangle = \sum_{k=1}^{N} e^{ipk}\,\sigma_-^{(k)}\,|\Omega\rangle\,, \qquad E = 2(1-\cos p) = 4\sin^2(p/2).$$

Однако, мы должны еще удовлетворить условию периодичности $a(k+N) = a(k)$. Оно приводит к тому, что параметр p (импульс) может принимать конечный набор значений

$$p = p_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Итак, мы нашли N собственных векторов вида

$$|\Psi^{(1)}\rangle = |\Psi^{(1)}_\ell\rangle = \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i\ell j/N} \sigma_-^{(j)} |\Omega\rangle\,, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

с собственными значениями $E_\ell = 2\Big(1 - \cos\frac{2\pi\ell}{N}\Big)$, причем $E_\ell > 0$ при $\ell \neq 0$ (состояние с $\ell = 0$ – это $S_-|\Omega\rangle$). Эти уровни вырождены, поскольку все состояния вида $S_-^m|\Psi^{(1)}_\ell\rangle$ с $1 < m \leq N-1$ – тоже собственные с той же энергией. Очевидно, $S_z|\Psi^{(1)}_\ell\rangle = (N-2)|\Psi^{(1)}_\ell\rangle$. Легко также проверить, что построенные состояния являются для оператора сдвига собственными: $e^{iP}|\Psi^{(1)}(p)\rangle = e^{ip}|\Psi^{(1)}(p)\rangle$ или

$$e^{iP}|\Psi^{(1)}_\ell\rangle = e^{2\pi i\ell/N}|\Psi^{(1)}_\ell\rangle$$

В пределе $N \to \infty$ возможные значения p заполняют отрезок от 0 до 2π. В физике твердого тела такие возбуждения называют магнонами. При малых p зависимость энергии магнона от его импульса такая же, как для обычных свободно движущихся массивных нерелятивистских частиц: $E(p) \approx p^2$. Если вспомнить о константе J, мы получили бы $E(p) \approx Jp^2$, так что $(2J)^{-1}$ играет роль массы этих частиц.

Задача. Доказать, что $S_+|\Psi^{(1)}_\ell\rangle = 0$ при $\ell \neq 0$. (Это означает, что векторы $|\Psi^{(1)}_\ell\rangle$ при $\ell \neq 0$ являются старшими относительно действия группы $SU(2)$.)

Задача. а) Найти норму построенных векторов относительно введенного ранее скалярного произведения в $\mathcal{H}$; б) Доказать, что $\Big\langle \Psi^{(1)}_l \Big| \Psi^{(1)}_{l'} \Big\rangle = 0$ при $l \neq l'$.

Два перевернутых спина. В подпространстве $\mathcal{H}(2) \subset \mathcal{H}$ (два перевернутых спина) должно быть $N(N-1)/2$ собственных вектора. Их можно искать в виде

$$\Big|\Psi^{(2)}\Big\rangle = \sum_{1\leq k_1<k_2\leq N} a(k_1,k_2)\, \sigma_-^{(k_1)}\sigma_-^{(k_2)}\, |\Omega\rangle$$

где $a(k_1,k_2)$ – неизвестные пока коэффициенты, удовлетворяющие условиям периодичности, которые будут учтены ниже. Физики называют $a(k_1,k_2)$ двухчастичной волновой функцией (в координатном представлении). Далее в этом разделе будем писать просто $|\Psi\rangle$ вместо $\Big|\Psi^{(2)}\Big\rangle$.

Уравнение на собственные значения оператора $H^{\rm xxx} = N - \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} \equiv \sum_{k=1}^{N} P_{k,k+1}$:

$$\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,|\Psi\rangle$$

Нам надо извлечь из него соотношения на коэффициенты $a(k_1,k_2)$, аналогичные (1.8). Для этого свернем обе части с ковектором $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}$,

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}\,|\Psi\rangle$$

и пронесем операторы перестановки налево, где они, подействовав на левый вакуум, благополучно исчезнут, поскольку вакуумное состояние инвариантно относительно любых перестановок (все спины смотрят вверх). Правило проноса таково:

$$\sigma_+^{(n)} P_{k,k+1} = P_{k,k+1}\Big[\sigma_+^{(n)} + \delta_{kn}(\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n}(\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)})\Big]$$

Применив его два раза, получим:

$$\begin{aligned}
& \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)} P_{k,k+1} \\
= \; & \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)} \\
& + \delta_{kn_1} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)}(\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) + \delta_{k+1,n_1} \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)}(\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \\
& + \delta_{kn_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)})\sigma_+^{(n_1)} + \delta_{k+1,n_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)})\sigma_+^{(n_1)} \\
& + \delta_{kn_1}\delta_{k+1,n_2} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)})(\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \\
& + \delta_{kn_2}\delta_{k+1,n_1} \langle\Omega|\, (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)})(\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)})
\end{aligned}$$

Далее просуммируем по k и воспользуемся тождеством $a(n_1, n_2) = \langle\Omega|\, \sigma_+^{(n_2)}\sigma_+^{(n_1)}\, |\Psi\rangle$ (при $n_1 < n_2$). В случае $n_1 < n_2 - 1$ (но $(n_1, n_2) \neq (1, N)$) последние две строчки не работают, и мы получаем уравнение

$$a(n_1+1, n_2) + a(n_1-1, n_2) + a(n_1, n_2+1) + a(n_1, n_2-1) - 4a(n_1, n_2) = -Ea(n_1, n_2) \quad (1.9)$$

по каждой из переменных такое же, как и (1.8). Если же $n_1 = n_2 - 1 = n$, в игру вступает также и предпоследняя строчка, и мы получаем:

$$a(n, n+2) + a(n-1, n+1) - 2a(n, n+1) = -Ea(n, n+1) \quad (1.10)$$

Наконец, если $n_1 = 1$, $n_2 = N$, вместо предпоследней вклад дает последняя строчка (при этом надо считать, что $\delta_{N+1,n} = \delta_{1,n}$):

$$a(1, N-1) + a(2, N) - 2a(1, N) = -Ea(1, N) \quad (1.11)$$

Забудем пока про уравнения (1.10) и (1.11), которые вступают в силу только для ближайших соседей, и попытаемся найти возможно более общее решение уравнения (1.9), распространив его на все возможные значения n_1, n_2 и не накладывая пока никаких дополнительных условий периодичности. Очевидно, одно из решений уравнения (1.9) при всех n_1, n_2 – это $a(n_1, n_2) = e^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2}$ с энергией $E = 2(1 - \cos p_1) + 2(1 - \cos p_2)$ и импульсом $P = p_1 + p_2$. Каково общее решение с данными энергией и импульсом? Можно было бы рассмотреть любую линейную комбинацию решений вида $e^{\pm ip_1 n_1 \pm ip_2 n_2}$. Все они имеют одну и ту же энергию, но их суперпозиции нам не подходят, поскольку они не будут собственными для оператора сдвига. Но есть еще одна возможность: взять

$$a(n_1, n_2) = Ae^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2} + Be^{ip_2 n_1 + ip_1 n_2} \quad (1.12)$$

с произвольными A, B, при этом по-прежнему $E = 2(1 - \cos p_1) + 2(1 - \cos p_2)$, и $P = p_1 + p_2$, т.е.

$$a(n_1 + 1, n_2 + 1) = e^{i(p_1+p_2)} a(n_1, n_2). \tag{1.13}$$

Но с этим решением пока тоже еще не все в порядке: при произвольных A и B оно не удовлетворяет уравнению (1.10). Посмотрим (вслед за Г.Бете), нельзя ли подобрать A и B так, чтобы это уравнение тоже удовлетворилось. Вычтем (1.10) из (1.9) при $n_1 = n_2 - 1 = n < N$, чтобы исключить E. Получим дополнительное условие

$$a(n, n) + a(n + 1, n + 1) = 2a(n, n + 1), \quad 1 \le n < N, \tag{1.14}$$

которому должна удовлетворять волновая функция (1.12). Подставив (1.12) в (1.14), найдем, что (1.12) является решением, если коэффициенты A, B связаны формулой

$$\frac{A}{B} = -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_1}}{1 + e^{i(p_1+p_2)} - 2e^{ip_2}} := e^{i\theta(p_1,p_2)}$$

Для краткости мы часто будем писать $\theta_{12} = \theta(p_1, p_2) = -\theta_{21}$. Итак, окончательный ответ:

$$\boxed{a(n_1, n_2) = e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + \frac{\theta_{12}}{2})} + e^{i(p_2 n_1 + p_1 n_2 + \frac{\theta_{21}}{2})} \quad (\text{при } n_1 < n_2)} \tag{1.15}$$

Упражнение. Проверить, что $2\mathrm{ctg}\,\dfrac{\theta_{12}}{2} = \mathrm{ctg}\,\dfrac{p_1}{2} - \mathrm{ctg}\,\dfrac{p_2}{2}$.

На бесконечной цепочке параметры p_1, p_2 произвольны. Но наша цепочка свернута в кольцо (N-периодична). Имеется очевидное условие периодичности

$$a(n_1 + N, n_2 + N) = a(n_1, n_2) \tag{1.16}$$

которое выражает просто тот факт, что систему как целое можно повернуть на 360°, и она тождественно перейдет в себя. Это условие влечет за собой квантование полного импульса: $e^{i(p_1+p_2)N} = 1$, т.е. $p_1 + p_2 = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 0, 1, \dots N - 1$, как и в случае одного магнона.

Есть и более тонкое условие периодичности. Поясним его на примере амплитуды $a(1, 2)$. Как она связана с амплитудой $a(1, N)$? На свернутой в кольце цепочке они *должны быть* связаны, поскольку в обоих случаях они соответствуют состояниям с двумя соседними перевернутыми спинами. Эти состояния отличаются только общим сдвигом на 1 узел. Вспоминая (1.13), можем поэтому написать $a(1, 2) = e^{i(p_1+p_2)} a(1, N)$. Но согласно тому же уравнению (1.13), $e^{i(p_1+p_2)} a(1, N) = a(2, N + 1)$, так что мы должны потребовать $a(1, 2) = a(2, N + 1)$.

Рассмотрим теперь $a(1, n)$ при $1 < n$. Как связаны амплитуды $a(1, n)$ и $a(1, N - n + 2)$? Обе амплитуды соответствуют состояниям, в которых перевернутые спины разделены $n - 1$ ребрами решетки. Они отличаются общим сдвигом на $n - 1$ узел, и, следовательно, $a(1, n) = e^{i(n-1)(p_1+p_2)} a(1, N - n + 2)$. Но $e^{i(n-1)(p_1+p_2)} a(1, N - n + 2) = a(n, N + 1)$, и, значит, мы должны потребовать $a(1, n) = a(n, N + 1)$. Наконец, сдвинув это условие как целое вдоль цепочки на k шагов, получим $a(k + 1, n + k) = a(n + k, N + k + 1)$, что можно записать в виде

$$\boxed{a(n_1, n_2) = a(n_2, n_1 + N) \qquad (\text{при } 1 \le n_1 < n_2 \le N)} \tag{1.17}$$

Это условие выражает собой периодичность при сдвиге на N *одной* из переменных (n_1) при фиксированном значении n_2. Отметим, что было бы *неверно* написать просто $a(n_1+N, n_2) = a(n_1, n_2)$, поскольку наша волновая функция определена только при $n_1 < n_2$, а при сдвиге $n_1 \to n_1 + N$ относительное расположение аргументов меняется. Это довольно тонкий момент, и его надо как следует продумать прежде чем двигаться дальше.

Другой способ понять это условие периодичности заключается в том, чтобы продолжить волновую функцию на область $n_1 > n_2$ наложением естественного требования симметрии при перестановке аргументов: $a(n_1, n_2) = a(n_2, n_1)$. Легко видеть, что продолженная таким образом функция дается формулой

$$a^{\mathrm{symm}}(n_1, n_2) = e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(n_2 - n_1)\theta_{12})} + e^{i(p_2 n_1 + p_1 n_2 + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(n_2 - n_1)\theta_{21})} \tag{1.18}$$

На такую функцию можно накладывать условие периодичности в обычном виде $a^{\mathrm{symm}}(n_1+N, n_2) = a^{\mathrm{symm}}(n_1, n_2)$. Оно эквивалентно (1.17).

Из условия периодичности сразу следуют ограничения на возможные значения p_1, p_2:

$$\left\{\begin{array}{l} e^{ip_1 N} = e^{i\theta(p_1, p_2)} \\ e^{ip_2 N} = e^{-i\theta(p_1, p_2)} \end{array}\right. \tag{1.19}$$

Это простейший пример системы уравнений Бете. Физики интерпретируют их следующим образом. Первый магнон, облетая цепочку по кругу, приобретает фазу, которая должна быть кратна 2π. С другой стороны, эта фаза складывается из фазы свободного движения $p_1 N$ и фазы рассеяния на втором магноне, которая равна $\theta(p_2, p_1)$. Первое уравнение Бете как раз говорит, что их сумма кратна 2π. Аналогично для второго магнона.

На самом деле уравнения Бете (1.19) получаются автоматически, если учесть условие (1.11) (которое до сих пор никак не использовалось) на конце свернутой в кольцо цепочки. Для этого вычтем (1.11) из (1.9) при $n_1 = 1$, $n_2 = N$, получим уравнение

$$a(0, N) + a(1, N+1) = 2a(1, N)$$

Подставив в него (1.12), получим (с учетом $e^{i(p_1+p_2)N} = 1$ и $A/B = e^{i\theta_{12}}$) те же уравнения Бете для p_1, p_2.

Задача. Найти решения системы уравнений Бете такие, что $p_1 = p_2$, а также найти соответствующие собственные векторы гамильтониана XXX-цепочки.

Результат этой задачи указывает на то, что не все решения уравнений Бете отвечают нетривиальным собственным состояниям.

Удобно переписать уравнения Бете в другой параметризации, в которой они становятся алгебраическими. Например, можно положить $e^{ip_1} = z_1$, $e^{ip_2} = z_2$, и тогда

$$\left\{\begin{array}{l} z_1^N = -\dfrac{1 + z_1 z_2 - 2z_1}{1 + z_1 z_2 - 2z_2} \\[2ex] z_2^N = -\dfrac{1 + z_1 z_2 - 2z_2}{1 + z_1 z_2 - 2z_1} \end{array}\right.$$

Но в дальнейшем окажется удобнее другая параметризация. Вместо p введем параметр λ следующим образом:

$$e^{ip} = \frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}}, \qquad \text{или} \qquad \lambda = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{p}{2} \tag{1.20}$$

Этот параметр иногда называют *быстротой*, – по-видимому, по смутной аналогии с релятивистской кинематикой. А по причине, которая выяснится позднее, его также называют *спектральным параметром*. Введем полезные в дальнейшем функции

$$\begin{aligned} p(\lambda) &:= -i\log\frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}} = -2\operatorname{arctg}(2\lambda) + \pi \pmod{2\pi} \\ \varepsilon(\lambda) &:= 2(1-\cos p(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{1.21}$$

которые имеют смысл импульса и энергии свободного магнона со спектральным параметром λ. Путем прямого вычисления можно убедиться, что

$$e^{i\theta(p_1,p_2)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i}{\lambda_1 - \lambda_2 - i} \tag{1.22}$$

т.е. сдвиг фазы при рассеянии двух магнонов зависит только от разности их быстрот, и в этом основное преимущество λ-параметризации. Система уравнений Бете запишется в виде

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}\right)^N = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i} \\[2ex] \left(\dfrac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right)^N = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i} \end{cases} \tag{1.23}$$

Посмотрим, как выглядят ее решения при $N \to \infty$. Извлечем корень N-й степени:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} = \omega_1 e^{\frac{i}{N}\theta_{12}} \\[2ex] \dfrac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} = \omega_2 e^{-\frac{i}{N}\theta_{12}} \end{cases}$$

где $\omega_{1,2}$ – два произвольных корня N-й степени из 1. В пределе $N \to \infty$ их аргументы независимо пробегают интервал $[0, 2\pi)$, а экспоненты в правых частях стремятся 1, так что переменные разделяются, и уравнения решаются тривиально. Физически полученные собственные векторы интерпретируются как состояния рассеяния двух магнонов.

Однако уравнения (1.23) могут иметь и комплексные решения. Положим $\lambda_1 = u_1 + iv_1$, $\lambda_2 = u_2 + iv_2$. Модуль первого уравнения дает:

$$\left(\frac{u_1^2 + (v_1 - \frac{1}{2})^2}{u_1^2 + (v_1 + \frac{1}{2})^2}\right)^N = \frac{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 - 1)^2}{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 + 1)^2}$$

Пусть $v_1 > 0$, тогда левая часть экспоненциально мала при $N \to \infty$. Таким образом, с экспоненциальной точностью имеем $u_1 = u_2$, $v_1 - v_2 = 1$. Взяв по модулю обе части второго уравнения, видим, что $v_2 < 0$. Перемножив два уравнения, получим:

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_2 + i(v_2 - \frac{1}{2})}{u_2 + i(v_2 + \frac{1}{2})} \right)^N = 1$$

Подставив сюда $u_1 = u_2$, $v_1 - v_2 = 1$, придем к соотношению

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{3}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \right)^N = 1$$

откуда $v_1 = \frac{1}{2}$. Итак, с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$ имеем семейство решений

$$\lambda_1 = u + \frac{i}{2}\,, \qquad \lambda_2 = u - \frac{i}{2} \tag{1.24}$$

На жаргоне специалистов по анзацу Бете такое решение называется *струной*. В данном случае это струна длины 2. Вещественный параметр u произволен. Через него выражается полный импульс данного состояния и его энергия:

$$\begin{aligned} p(\lambda_1, \lambda_2) &= p(\lambda_1) + p(\lambda_2) = p(u/2) = -i \log \frac{u+i}{u-i} \\ E(\lambda_1, \lambda_2) &= \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2) = 1 - \cos p(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{u^2+1} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Упражнение. Вывести эти формулы.

Задача. Доказать, что $E(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2})$ всегда меньше, чем энергия двух магнонов с импульсами p_1 и p_2 такими, что $p_1 + p_2 = p(u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}) = p(u/2)$. Поэтому данное состояние можно интерпретировать как связанное состояние двух магнонов. Описать качественно, как выглядит его волновая функция.

Вернемся к случаю конечных N и подведем итог. Мы построили собственные состояния оператора $H^{\rm xxx}$ вида $|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$, где λ_1, λ_2 – любое решение системы уравнений Бете (1.23). Их импульс и энергия даются формулами

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = p(\lambda_1) + p(\lambda_2)$$

$$E(\lambda_1, \lambda_2) = \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2)$$

Эти состояния вырождены, поскольку все состояния вида $S_-^m |\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ с $1 < m \leq N - 2$ – тоже собственные с той же энергией. Очевидно, $S_z |\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = (N - 4)|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$.

Задача. Доказать, что $S_+ |\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle = 0$. (Это означает, что векторы $|\Psi(\lambda_1, \lambda_2)\rangle$ являются старшими относительно действия группы $SU(2)$.)

Более двух перевернутых спинов: общий случай. То, что нам удалось диагонализовать гамильтониан в секторе с двумя перевернутыми спинами, не удивительно (задача двух тел всегда решается). Замечательно то, что тот же метод позволяет продвинуться гораздо дальше и решить задачу в секторе с любым количеством m перевернутых спинов.

Итак, собственные состояния оператора $H^{\mathrm{xxx}} = N - \mathcal{P}$ в подпространстве $\mathcal{H}(m)$ будем искать в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{1\le k_1<\ldots<k_m\le N} a(k_1,\ldots,k_m)\,\sigma_-^{(k_1)}\ldots\,\sigma_-^{(k_m)}\,|\Omega\rangle$$

Уравнение на собственные значения такое же, как и ранее: $\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,|\Psi\rangle$ (напомним, что $\mathcal{P} = \sum_k P_{k,k+1}$). Аналогично тому, как мы это делали для двух спинов, свернем обе части с ковектором $\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}$ (при $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$),

$$\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\mathcal{P}\,|\Psi\rangle = (N-E)\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\,|\Psi\rangle \tag{1.26}$$

и пронесем все операторы перестановки налево. Для сокращения записи правило проноса запишем в виде

$$\sigma_+^{(n)}P_{k,k+1} = P_{k,k+1}(\sigma_+^{(n)} + \beta_k^{(n)})$$

где

$$\beta_k^{(n)} \equiv \delta_{kn}(\sigma_+^{(n+1)} - \sigma_+^{(n)}) + \delta_{k+1,n}(\sigma_+^{(n-1)} - \sigma_+^{(n)})$$

Правая часть равенства (1.26) равна $(N-E)a(n_1,\ldots,n_m)$, а левая после проноса операторов перестановки налево выглядит следующим образом:

$$\sum_k \langle\Omega|\,(\sigma_+^{(n_1)} + \beta_k^{(n_1)})(\sigma_+^{(n_2)} + \beta_k^{(n_2)})\ldots(\sigma_+^{(n_m)} + \beta_k^{(n_m)})\,|\Psi\rangle$$

Не очень вразумительно, но давайте посмотрим, что получается после раскрытия скобок и взятия суммы по k (от 1 до N). Во-первых, имеется член, не содержащий операторов $\beta_k^{(n)}$; он не зависит от k, и после взятия суммы дает

$$N\,\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\,|\Psi\rangle\,.$$

Во-вторых, имеется m членов, в каждый из которых операторы β входят по одному разу. Они объединяются в выражение

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\cancel{\sigma}_+^{(n_\alpha)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\Big(\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)}\Big)\,|\Psi\rangle$$

Здесь перечеркнутый оператор означает его отсутствие в данном месте. Легко видеть, что

$$\sum_k \beta_k^{(n)} = \sigma_+^{(n+1)} + \sigma_+^{(n-1)} - 2\sigma_+^{(n)},$$

так что эти члены имеют вполне ожидаемый вид, уже знакомый по предыдущим более простым случаям. Рассмотрим теперь члены, в которые операторы β входят по два раза:

$$\sum_{\substack{\alpha,\alpha'=1\\ \alpha<\alpha'}}^{m} \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\cancel{\sigma}_+^{(n_\alpha)}\ldots\cancel{\sigma}_+^{(n_{\alpha'})}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\Big(\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)}\beta_k^{(n_{\alpha'})}\Big)\,|\Psi\rangle$$

Задача. Показать, что

$$\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha'})} = 0 \quad \text{при } |\alpha' - \alpha| \geq 2 \ (\mathrm{mod}\ m)$$

$$\sum_k \beta_k^{(n_\alpha)} \beta_k^{(n_{\alpha+1})} = 2\, \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \sigma_+^{(n_\alpha)} \sigma_+^{(n_\alpha+1)}$$

Отсюда следует, что квадратичные по β члены сворачиваются в выражение

$$2 \sum_{\alpha=1}^m \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \, \sigma_+^{(n_m)} \, |\Psi\rangle$$

(Индекс α здесь и далее понимается по модулю m.) Наконец, посмотрим, что дают члены третьей и более высокой степени по β. И тут выясняется факт, благодаря которому метод Бете работает при $m > 2$:

$$\sum_k \beta_k^{(n_{\alpha_1})} \beta_k^{(n_{\alpha_2})} \ldots \beta_k^{(n_{\alpha_r})} = 0 \quad \text{при } r \geq 3 \text{ и всех } n_{\alpha_i}$$

Доказательство совсем нетрудное; провести его предлагается в качестве задачи. Поэтому членов, содержащих более двух операторов β в левой части (1.26) просто нет!

Собирая все вместе, имеем:

$$\langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} (\mathcal{P} - N)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^m \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})} \sigma_+^{(n_\alpha+1)} \sigma_+^{(n_{\alpha+1})} \ldots \sigma_+^{(n_m)} + \sum_{\alpha=1}^m \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})} \sigma_+^{(n_\alpha-1)} \sigma_+^{(n_{\alpha+1})} \ldots \sigma_+^{(n_m)}$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^m (\delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}} - 1) \langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_m)} \tag{1.27}$$

В суммах по α индекс суммирования надо понимать по модулю m. Во второй сумме сдвинем индекс суммирования $\alpha \to \alpha + 1$. После взятия скалярного произведения с вектором $|\Psi\rangle$ получим следующее уравнение на амплитуды $a(n_1, \ldots, n_m)$:

$$\sum_{\alpha=1}^m (1 - \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}}) \, a(n_1, \ldots, n_{\alpha-1}, n_\alpha + 1, n_{\alpha+1}, \ldots, n_m)$$

$$+ \quad \sum_{\alpha=1}^m (1 - \delta_{n_\alpha, n_{\alpha+1}-1}) \, a(n_1, \ldots, n_{\alpha-1}, n_\alpha, n_{\alpha+1} - 1, \ldots, n_m)$$

$$- \quad 2 \sum_{\alpha=1}^m (1 - \delta_{n_\alpha+1, n_{\alpha+1}}) \, a(n_1, \ldots, n_m) \ = \ -E \, a(n_1, \ldots, n_m)$$

Символы Кронекера в первых двух суммах возникли по следующей причине. В первой сумме член с $n_\alpha + 1 = n_{\alpha+1}$ соответствовал бы вектору $\langle \Omega | \, \sigma_+^{(n_1)} \ldots \sigma_+^{(n_{\alpha-1})}$, в котором есть два одинаковых оператора σ_+, а потому такой вектор зануляется, и его вклад в уравнении на волновую функцию надо исключить. С помощью операторов сдвига $e^{\pm\partial_{n_\alpha}}$ уравнение на волновую функцию можно записать несколько короче:

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)+\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}}\Big(2-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)$$

$$= \; E\,a(n_1,\ldots,n_m) \tag{1.28}$$

Как и в случае $m=2$ будем искать решения среди функций $a(n_1,\ldots,n_m)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2-e^{\partial_{n_\alpha}}-e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)= \; E\,a(n_1,\ldots,n_m) \tag{1.29}$$

при всех n_i, а оставшиеся члены в левой части обратятся в 0 при наложении дополнительных условий

$$a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha,\ldots,n_m)+a(n_1,\ldots,n_\alpha+1,n_\alpha+1,\ldots,n_m)=2a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha+1,\ldots,n_m) \tag{1.30}$$

Общее решение первого уравнения, собственное для оператора сдвига, таково:

$$a(n_1,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}A_\sigma\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j\Big)$$

Внешняя сумма берется по всем $m!$ перестановкам индексов $\{1,2,\ldots,m\}$, а параметры p_α и коэффициенты A_σ произвольны. При этом импульс и энергия даются формулами

$$P=\sum_{\alpha=1}^{m}p_\alpha\,,\qquad E=2\sum_{\alpha=1}^{m}(1-\cos p_\alpha)$$

Аналогично случаю $m=2$ условия (1.30) налагают на коэффициенты A_σ соотношения, которые удается однозначно разрешить с точностью до общего множителя. Подробный анализ предлагается проделать в качестве поучительного упражнения (если не в общем виде, то хотя бы для $m=3$).

Результат имеет следующий вид (при $1\le n_1<n_2<\ldots<n_N\le N$):

$$\boxed{a(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j+\frac{i}{2}\sum_{j<k}\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big)} \tag{1.31}$$

где фазы $\theta_{jk}\equiv\theta(p_j,p_k)$ определяются той же формулой

$$e^{i\theta(p_j,p_k)}=-\,\frac{1+e^{i(p_j+p_k)}-2e^{ip_j}}{1+e^{i(p_j+p_k)}-2e^{ip_k}}$$

что и раньше. Выражение (1.31) называется *волновой функцией Бете*. Как уже отмечалось, это состояние имеет энергию $E=2\sum\limits_{j=1}^{m}(1-\cos p_j)$. Аналогично (1.18), можно продолжить волновую функцию (1.31) симметричным образом во все области конфигурационного пространства с другим порядком расположения $n_1,n_2,\ldots,n_N$:

$$a^{\mathrm{symm}}(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j+\frac{i}{2}\sum_{j<k}\mathrm{sign}\,(n_k-n_j)\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big) \tag{1.32}$$

Условие периодичности запишется теперь так:

$$\boxed{a(n_1, n_2, \ldots, n_m) = a(n_2, n_3, \ldots, n_1 + N)} \tag{1.33}$$

что приводит к системе уравнений Бете:

$$e^{ip_j N} = \prod_{k \neq j} e^{i\theta(p_j, p_k)}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.34}$$

В λ-параметризации она выглядит следующим образом:

$$\boxed{\left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{k \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}, \quad j = 1, \ldots, m.} \tag{1.35}$$

Упражнение. Вывести условие периодичности (1.33) для $m = 3$ с помощью рассуждения, аналогичного тому, которое было использовано при выводе условия (1.17).

Задача (сложная). Доказать, что все собственные состояния $\left|\Psi^{(m)}\right\rangle$, построенные по решениям уравнений Бете, являются старшими, т.е. $S_+ \left|\Psi^{(m)}\right\rangle = 0$.

Решения системы (1.35) при $N \to \infty$ исследуются аналогично случаю двух магнонов. Вещественным решениям соответствуют состояния m независимых магнонов. Комплексные решения собираются в "струны", длины которых могут быть равны $2M + 1 \leq m$, где $M \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Числа λ_k для струны длины $2M + 1$ таковы:

$$\lambda_k = u + ik, \quad k = -M, -M + 1, \ldots, M - 1, M,$$

где u – произвольный вещественный параметр. Например, струна длины 2 – это $\{u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}\}$, длины 3 – $\{u+i, u, u-i\}$, и т. д. Струны длины $2M+1 > 1$ интерпретируются как связанные состояния $2M+1$ магнонов. Сами магноны можно формально считать струнами длины 1 (в этом случае $M = 0$).

Задача. Вывести возможный вид струнных решений уравнений Бете в пределе $N \to \infty$.

Итак, в собственном состоянии общего вида числа λ_j объединяются в струны различной длины. Обозначим через ν_M число струн длины $2M + 1$ и через $\lambda_{j,M}$ ($j = 1, \ldots, \nu_M$) вещественные части параметров λ, входящих в струну с номером j. Полное число струн (включая струны длины 1) обозначим через Q. Имеем:

$$Q = \sum_{M \geq 0} \nu_M \,, \qquad m = \sum_{M \geq 0} (2M + 1)\nu_M$$

Набор целых чисел $\{m, Q, \{\nu_M\}\}$, связанных этими соотношениями, характеризует состояние с точностью до задания Q вещественных чисел $\lambda_{j,M}$. Будем называть такой набор конфигурацией. Энергия и импульс состояния, отвечающего данной конфигурации, складываются из Q слагаемых, представляющих собой энергию и импульс отдельных струн (это верно с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$).

Задача. Показать, что энергия и импульс струны длины $2M+1$ с $\lambda_k = u + ik$ $(k = -M, -M+1, \dots, M-1, M)$ с экспоненциальной точностью при $N \to \infty$ даются формулами:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2M+1}\,\varepsilon\Big(\frac{u}{2M+1}\Big) = \frac{2M+1}{u^2+(M+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{2M+1}\,(1-\cos P), \\
P &= p\Big(\frac{u}{2M+1}\Big) = -2\mathrm{arctg}\,\frac{u}{M+\frac{1}{2}} + \pi \pmod{2\pi}
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

При фиксированном m и $N \to \infty$ вещественные параметры $\lambda_{j,M}$ произвольны, подобно тому, как это было для $m = 2$. Если же N стремится к ∞ вместе с m, так что отношение m/N фиксировано, для параметров $\lambda_{j,M}$ заданной конфигурации можно вывести систему уравнений, которая получается из исходных уравнений Бете следующим образом. Для выделенной струны длины $2M+1$ перемножим уравнения Бете для входящих в эту струну параметров λ_j. В правой части перемножим сомножители $\frac{\lambda_j-\lambda_k-i}{\lambda_j-\lambda_k+i}$ по k в соответствии с разбиением переменных λ на струны в данной конфигурации. Введем обозначение

$$
V_0(\lambda) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}
$$

Задача. Доказать тождества

$$
\prod_{l=-M}^{M} V_0(2\lambda+2il) = V_0\Big(\frac{2\lambda}{2M+1}\Big)
$$

$$
\prod_{l=-M}^{M} V_0(\lambda+il) = V_0\Big(\frac{\lambda}{M}\Big)V_0\Big(\frac{\lambda}{M+1}\Big) \equiv V_M(\lambda)
$$

$$
\prod_{l_1=-M_1}^{M_1}\prod_{l_2=-M_2}^{M_2} V_0(\lambda+i(l_1+l_2)) = \prod_{L=|M_1-M_2|}^{M_1+M_2} V_L(\lambda) \equiv V_{M_1,M_2}(\lambda)
$$

Задача. Показать, что система уравнений на вещественные параметры $\lambda_{j,M}$ имеет вид

$$
V_0^N\Big(\frac{\lambda_{j,M_1}}{M_1+\frac{1}{2}}\Big) = \prod_{M_2}\prod_{\substack{k=1\\(k,M_2)\neq(j,M_1)}}^{\nu_{M_2}} V_{M_1,M_2}(\lambda_{j,M_1}-\lambda_{k,M_2})
\tag{1.37}
$$

Таким образом, при $N \to \infty$ собственные векторы гамильтониана XXX-цепочки представляют собой состояния рассеяния магнонов и их связанных состояний – струн длины больше 1.

1.1.4 Основное состояние антиферромагнитной цепочки

Рассмотрим теперь гамильтониан XXX-модели, взятый с другим знаком:

$$
H^{\mathrm{xxx,AF}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_0^{(k)}\sigma_0^{(k+1)}\Big)
$$

При этом во всех полученных выше выражениях для энергий m-магнонных состояний надо изменить знак. Это приведет к тому, что вакуум $|\Omega\rangle$ будет теперь обладать *максимальной* энергией (равной 0), а все состояния с каким-то количеством магнонов с ненулевыми импульсами будут иметь отрицательные значения энергии – тем меньшие, чем больше m. Физики поэтому говорят, что в этом случае $|\Omega\rangle$ – ложный вакуум, а настоящий (физический) вакуум, т.е. состояние с максимальной по модулю отрицательной энергией, получается заполнением ложного вакуума максимально возможным количеством магнонов. Здесь можно провести аналогию с морем Дирака.

В этом разделе мы будем считать, что N четно. Тогда основное состояние будет находиться в секторе с нулевой полной проекцией спина, т.е. будет иметь $m = N/2$ перевернутых спинов. Далее в этом разделе мы покажем, что уравнения Бете позволяют получить исчерпывающую информацию об этом состоянии при $N \to \infty$. Полное описание возбужденных состояний над физическим вакуумом тоже возможно (см., например, [5]), но мы ограничимся только анализом основного состояния. Можно показать, что в основном состоянии все λ_j вещественны, т.е. струн длины больше 1 нет.

Итак, рассмотрим систему уравнений (1.35) и перейдем в ней к логарифмам:

$$N \log \frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}} = \sum_{k=1,\neq j}^{N/2} \log \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i} + 2\pi i q_j, \quad j = 1, \ldots, \frac{N}{2},$$

или

$$N p(\lambda_j) = \sum_{k=1,\neq j}^{N/2} p\Big(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{2}\Big) - 2\pi q_j$$

где q_j – какие-то целые числа. Вспомнив, что $2\lambda = -\mathrm{tg}\,\dfrac{p-\pi}{2}$ (см. (1.20)), мы можем записать эти уравнения в виде

$$\mathrm{arctg}(2\lambda_j) = \frac{\pi}{N} Q_j + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2} \mathrm{arctg}(\lambda_j - \lambda_k), \quad j = 1, \ldots, \frac{N}{2}$$

где целые (при нечетных $N/2$) или полуцелые (при четных $N/2$) числа Q_j связаны с исходными целыми q_j формулой $Q_j = \frac{1}{4}(3N+2) - q_j$. Подробный анализ показывает, что в основном состоянии последовательность чисел Q_j монотонно возрастает вместе с j в интервале $\left[-\frac{N}{4} + \frac{1}{2},\, \frac{N}{4} - \frac{1}{2}\right]$, т.е. $Q_{j+1} - Q_j = 1$. При $N \to \infty$ можно заменить

$$\frac{Q_j}{N} \to x, \quad \lambda_j \to \lambda(x), \quad -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}$$

где $\lambda(x)$ – монотонная непрерывная функция, причем $\lambda(\pm\frac{1}{4}) = \pm\infty$. На нее в пределе получается интегральное уравнение

$$\mathrm{arctg}\, 2\lambda(x) = \pi x + \int_{-1/4}^{1/4} \mathrm{arctg}\,(\lambda(x) - \lambda(x'))dx' \tag{1.38}$$

Удобнее, однако, работать с функцией

$$\rho(\lambda) = \Big(\frac{d\lambda(x)}{dx}\Big)^{-1}\Big|_{x=x(\lambda)} \tag{1.39}$$

(здесь $x(\lambda)$ – функция, обратная к $\lambda(x)$), которая имеет смысл нормированной плотности чисел λ_j в интервале $[\lambda,\ \lambda+d\lambda]$. Это легко понять, написав

$$N\rho(\lambda)d\lambda = N(x(\lambda+d\lambda)-x(\lambda)) = N\frac{dx}{d\lambda}d\lambda = Ndx$$

По определению функции $x(\lambda)$ справа стоит количество чисел Q_j на интервале $[x, x+dx]$. Поэтому левая часть равна количеству чисел λ_j в интервале $[\lambda,\ \lambda+d\lambda]$. Отсюда ясно, что функция $\rho(\lambda)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2} \tag{1.40}$$

Введение функции плотности позволяет в пределе $N\to\infty$ заменять суммы интегралами по правилу

$$\sum_j f(\lambda_j) = N\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Дифференцируя (1.38) по x, получим для $\rho(\lambda)$ интегральное уравнение

$$\pi\rho(\lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\mu)\,d\mu}{(\lambda-\mu)^2+1} = \frac{2}{4\lambda^2+1} \tag{1.41}$$

Оно решается преобразованием Фурье. Чтобы перейти к Фурье-образам, проинтегрируем обе части с функцией $e^{i\lambda\xi}$ и учтем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda\xi}d\lambda}{\lambda^2+1} = \pi e^{-|\xi|}$$

Тогда на Фурье-образ $\hat{\rho}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}\rho(\lambda)d\lambda$ получается алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид $\hat{\rho}(\xi) = \dfrac{1}{2\cosh(\xi/2)}$, откуда

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda\xi}\,d\xi}{2\cosh(\xi/2)} = \frac{1}{2\cosh(\pi\lambda)} \tag{1.42}$$

Энергия и импульс основного состояния вычисляются по формулам

$$E_0 = -\sum_{k=1}^{N/2}\varepsilon(\lambda_j) = -N\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

$$P_0 = \sum_{k=1}^{N/2}p(\lambda_j) = \int_{-\infty}^{\infty}p(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

Упражнение. Вычислить эти интегралы и показать, что $E_0 = -2N\log 2$, $P_0 = \pi N/2 \pmod{2\pi}$.

1.1.5 Анизотропная спиновая цепочка: XXZ-модель

Гамильтониан анизотропной модели Гейзенберга (XXZ-модели) имеет вид

$$\boxed{H^{\mathrm{xxz}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \Delta(\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - 1)\Big)} \tag{1.43}$$

где Δ называется параметром анизотропии. Диагонализация этого оператора методом Бете лишь немногим сложнее, чем в изотропном случае. В самом деле, написав

$$H^{\mathrm{xxz}} = H^{\mathrm{xxx}} - \frac{1}{2}\,(\Delta - 1)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - N\Big)$$

видим, что добавочная часть действует на базисные векторы диагонально и потому ее вклад легко учитывается.

Введем временное обозначение $\Big|\, k_1, k_2, \ldots, k_m\Big\rangle \equiv \sigma_+^{(k_1)}\sigma_+^{(k_2)}\ldots\sigma_+^{(k_m)}\,|\Omega\rangle$ (как обычно, при $1 \le k_1 \le \ldots \le k_m \le N$). Из очевидного равенства

$$\sigma_z^{(k)}\Big|\, k_1, k_2, \ldots, k_m\Big\rangle = \Big(1 - 2\sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{k,k_\alpha}\Big)\Big|\, k_1, k_2, \ldots, k_m\Big\rangle$$

легко следует, что

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - N\Big)\Big|\, k_1, k_2, \ldots, k_m\Big\rangle = 4\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(\delta_{k_\alpha+1,k_{\alpha+1}} - 1\Big)\Big|\, k_1, k_2, \ldots, k_m\Big\rangle$$

Этот добавочный вклад приведет к тому, что в выражении для ковектора

$$-\langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}H^{\mathrm{xxz}} = \langle\Omega|\,\sigma_+^{(n_1)}\ldots\sigma_+^{(n_m)}\Big[\mathcal{P} - N + \frac{1}{2}(\Delta - 1)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} - N\Big)\Big]$$

аналогичном (1.27) третья сумма в правой части войдет с коэффициентом 2Δ вместо 2. Следовательно, уравнение (1.28) и условия (1.30) примут соответственно вид

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{m}\Big(2\Delta - e^{\partial_{n_\alpha}} - e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m) + \sum_{\alpha=1}^{m}\delta_{n_\alpha+1,n_{\alpha+1}}\Big(2\Delta - e^{\partial_{n_\alpha}} - e^{-\partial_{n_\alpha}}\Big)\,a(n_1,\ldots,n_m)\\ = E\,a(n_1,\ldots,n_m)\end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha,\ldots,n_m) + a(n_1,\ldots,n_\alpha{+}1,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m)\\ = 2\Delta a(n_1,\ldots,n_\alpha,n_\alpha{+}1,\ldots,n_m)\end{aligned} \tag{1.45}$$

Общее решение первого уравнения, собственное для оператора сдвига, такое же, как и в изотропном случае:

$$a(n_1,\ldots,n_m) = \sum_{\sigma\in S_m} A_\sigma \exp\Big(i\sum_{j=1}^{m}p_{\sigma(j)}n_j\Big)$$

Полный импульс опять дается суммой параметров p_α, но выражение для энергии модифицируется:

$$P = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\,, \qquad E = 2\sum_{\alpha=1}^{m}(\Delta - \cos p_\alpha)$$

Условия (1.45) налагают на коэффициенты A_σ соотношения, которые удается однозначно разрешить с точностью до общего множителя.

Волновая функция Бете (при $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_N \le N$) имеет такой же общий вид (1.31), как и раньше:

$$a(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \exp\Big(i\sum_{j=1}^{m} p_{\sigma(j)} n_j + \frac{i}{2}\sum_{j<k}\theta_{\sigma(j)\sigma(k)}\Big) \tag{1.46}$$

но фазы $\theta_{jk} \equiv \theta(p_j, p_k)$ определяются теперь формулой

$$e^{i\theta(p_j,p_k)} = -\frac{1 + e^{i(p_j+p_k)} - 2\Delta e^{ip_j}}{1 + e^{i(p_j+p_k)} - 2\Delta e^{ip_k}}$$

Условие периодичности (1.33) приводит к тем же уравнениям Бете на параметры p_i в форме (1.34).

Существуют также аналоги λ-параметризации. Они различны в случаях $\Delta > 1$ и $0 < \Delta < 1$.

Пусть сначала $\Delta > 1$. Параметр λ вводится формулой

$$e^{ip} = \frac{\sin\eta(\lambda + \frac{i}{2})}{\sin\eta(\lambda - \frac{i}{2})} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{ctg}\frac{p}{2} = \coth(\eta/2)\operatorname{tg}(\eta\lambda) \tag{1.47}$$

где вещественный параметр η связан с Δ соотношением

$$\Delta = \cosh\eta \tag{1.48}$$

Для сдвига фазы имеем:

$$e^{i\theta_{12}} = \frac{\sin\eta(\lambda_1 - \lambda_2 + i)}{\sin\eta(\lambda_1 - \lambda_2 - i)} \tag{1.49}$$

Функции $p(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ таковы (ср. с (1.21)):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(\eta\lambda)}{\tanh(\eta/2)}\right) + \pi \\ \varepsilon(\lambda) &= \frac{2\sinh^2\eta}{\cosh\eta - \cos(2\eta\lambda)} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Они переходят в (1.21) в пределе $\eta \to 0$. Уравнения Бете для XXZ-модели в λ-параметризации таковы:

$$\boxed{\left(\frac{\sin\eta(\lambda_j - \frac{i}{2})}{\sin\eta(\lambda_j + \frac{i}{2})}\right)^N = \prod_{k\neq j}\frac{\sin\eta(\lambda_j - \lambda_k - i)}{\sin\eta(\lambda_j - \lambda_k + i)}, \quad j = 1, \ldots, m.} \tag{1.51}$$

Формулы для случая $|\Delta| < 1$ получаются из написанных выше заменой $\eta = i\gamma$, при этом $\Delta = \cos\gamma$.

Задача. Найти струнные решения уравнений Бете для XXZ-модели при $m = 2$ в пределе $N \to \infty$ и выразить импульс и энергию соответствующих состояний через вещественные части чисел λ_j.

1.2 Анзац Бете для одномерного бозе-газа с точечным взаимодействием

Цель этого раздела – показать, как анзац Бете работает для непрерывных моделей.

Рассмотрим N квантовых частиц на прямой, которые взаимодействуют, только когда какие-то две из них оказываются в одной точке. Такое "точечное взаимодействие" математически описывается потенциалом в виде δ-функции. Гамильтониан в координатном представлении имеет вид

$$\hat{H}_N = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1\leq j<k\leq N} \delta(x_j - x_k) \tag{1.52}$$

Мы положили $\hbar = 1$, масса частицы $= \frac{1}{2}$. При $c = 0$ имеем систему свободных (невзаимодействующих) частиц. При $c > 0$ частицы отталкиваются друг от друга (им энергетически невыгодно находиться в одной точке), при $c < 0$ притягиваются. Ниже мы будем рассматривать случай отталкивания $c > 0$.

По правилам квантовой механики оператор импульса такой системы частиц:

$$\hat{P}_N = -i \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.53}$$

Он коммутирует с гамильтонианом, поскольку взаимодействие зависит только от разностей координат. То есть полный импульс сохраняется. Стационарное уравнение Шредингера для волновой функции Ψ имеет вид

$$\hat{H}_N \Psi(x_1, \ldots, x_N) = E\Psi(x_1, \ldots, x_N) \tag{1.54}$$

Его-то мы и хотим решить. А точнее, мы хотим, как и в случае XXX-модели, найти общие собственные функции гамильтониана и оператора полного импульса, а также, в первую очередь, собственные значения энергии на таких состояниях (спектр).

1.2.1 Волновая функция Бете

Начнем опять с тривиального случая одной частицы. Имеем:

$$\Psi(x_1) = e^{ip_1 x_1}\,, \qquad E = p_1^2$$

Если наложить периодические граничные условия $\Psi(x_1 + L) = \Psi(x_1)$, импульс p_1 будет квантоваться: $p_1 = 2\pi\ell/L$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Поскольку частица одна, взаимодействие никак не проявляется.

Для двух частиц задача становится интереснее:

$$-(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\Psi(x_1, x_2) + 2c\delta(x_1 - x_2)\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2)$$

При $x_1 = x_2$ имеется особенность. Волновая функция при этом непрерывная, но ее производные испытывают скачок. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, и частицы ведут себя как свободные, т.е волновую функцию при, например, $x_1 < x_2$ можно искать в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = A_{12} e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} + A_{21} e^{i(p_1 x_2 + p_2 x_1)},$$

при этом $-(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2)\Psi = E\Psi$ с $E=p_1^2+p_2^2$.

Дельта-функционный потенциал эквивалентен наложению определенного граничного условия на эту функцию при $x_1 = x_2-0$. Несложные аргументы показывают, что условие это таково:

$$(\partial_{x_2}-\partial_{x_1}-c)\,\Psi\Big|_{x_1=x_2-0}=0 \tag{1.55}$$

откуда находим

$$\frac{A_{21}}{A_{12}}=\frac{p_1-p_2-ic}{p_1-p_2+ic} \tag{1.56}$$

Чтобы вывести данное условие, перейдем к координатам $x=x_2-x_1$, $X=\frac{1}{2}(x_2+x_1)$, тогда $\partial_{x_2}-\partial_{x_1}=2\partial_x$, $\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2=2\partial_x^2+\frac{1}{2}\partial_X^2$, и уравнение Шредингера запишется в виде

$$-2\partial_x^2\Psi+2c\delta(x)\Psi=(E+\frac{1}{2}\,\partial_X^2)\Psi$$

В правой части собраны члены, которые остаются конечными при $x=0$. Левая часть тоже должна быть конечной, а это значит, что особенность δ-функционного члена должна компенсироваться разрывом первой производной Ψ в точке $x=0$. Иными словами, проинтегрируем обе части уравнения по x по малому интервалу $[0,\varepsilon]$ и устремим $\varepsilon\to 0$:

$$\int_0^\varepsilon(-2\partial_x^2\Psi+2c\delta(x)\Psi)dx=0$$

В правой части мы написали 0, поскольку в пределе $\varepsilon\to 0$ все члены в правой части исчезают. Имеем, следовательно, соотношение

$$-2\partial_x\Psi\Big|_0^\varepsilon+2c\int_0^\varepsilon\delta(x)\Psi dx=0$$

Возникает вопрос, как понимать интеграл от δ-функции по отрезку, левым концом которого является носитель δ-функции – точка $x=0$. В большинстве изложений метода Бете для этой модели интегрирование здесь проводится по отрезку $|x|\le\varepsilon$, что, с одной стороны, снимает эту проблему, а с другой требует продолжения волновой функции в область $x_1>x_2$, в которой она изначально не была определена. (Между тем, исходная задача по сути не предполагает такого доопределения.) Конечно, всегда предполагается симметричное продолжение, и это правильно, но нам кажется важным, что есть возможность провести все рассуждения, оставаясь в секторе $x_1\le x_2$. А если так, то интеграл, одним из пределов которого является носитель δ-функции, надо понимать как *половину* такого интеграла по отрезку, содержащего носитель внутри, поскольку работать будет только половина δ-функции. Аналогично, $\partial_x\Psi(0)$ надо понимать как 0 в силу симметрии. Поэтому наше условие говорит, что

$$2\lim_{x\to+0}\partial_x\Psi(x)=c\Psi(0)$$

что совпадает с (1.55).

Более формальный способ действий заключается в том, чтобы искать решение во всей области изменения координат x_1,x_2, но при этом сразу наложить условие симметрии волновой функции $\Psi(x_1,x_2)=\Psi(x_2,x_1)$. А именно, будем искать решение в виде

$$\Psi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)\theta(x_2-x_1)+f(x_2,x_1)\theta(x_1-x_2)$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда ($\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$), а

$$f(x_1, x_2) = A_{12} e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} + A_{21} e^{i(p_1 x_2 + p_2 x_1)}$$

это функция, которую мы ранее обозначали через Ψ. Заметим, что если доопределить функцию Хэвисайда условием $\theta(0) = \frac{1}{2}$, функция Ψ будет непрерывна при $x_1 = x_2$. Т.к. $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, имеем в результате прямого вычисления:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}^2 \Psi(x_1, x_2) &= \partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2)\theta(x_2 - x_1) + \partial_{x_1}^2 f(x_2, x_1)\theta(x_1 - x_2) \\
&- 2\partial_{x_1} f(x_1, x_2)\delta(x_1 - x_2) + 2\partial_{x_1} f(x_2, x_1)\delta(x_1 - x_2) \\
&- f(x_1, x_2)\delta'(x_1 - x_2) + f(x_2, x_1)\delta'(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

Аналогично для $\partial_{x_2}^2 \Psi(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_2}^2 \Psi(x_1, x_2) &= \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2)\theta(x_2 - x_1) + \partial_{x_2}^2 f(x_2, x_1)\theta(x_1 - x_2) \\
&+ 2\partial_{x_2} f(x_1, x_2)\delta(x_1 - x_2) - 2\partial_{x_2} f(x_2, x_1)\delta(x_1 - x_2) \\
&- f(x_1, x_2)\delta'(x_1 - x_2) + f(x_2, x_1)\delta'(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

В сумме имеем:

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\Psi(x_1, x_2) &= \theta(x_2 - x_1)(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) f(x_1, x_2) + \theta(x_1 - x_2)(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) f(x_2, x_1) \\
&- 2\delta(x_1 - x_2)(\partial_{x_1} - \partial_{x_2}) \left[f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1) \right] \\
&- 2\delta'(x_1 - x_2) \left[f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1) \right]
\end{aligned}$$

Отметим, что член с δ' автоматически не зануляется. Его надо понимать в смысле обобщенных функций как

$$\delta'(x_1 - x_2)\varphi(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\,\delta(x_1 - x_2)(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\varphi(x_1, x_2),$$

что верно для любой антисимметричной непрерывной функции φ, поскольку интегралы с любой гладкой пробной функцией от обеих частей равны. Учтя это, получим:

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\Psi(x_1, x_2) &= \theta(x_2 - x_1)(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) f(x_1, x_2) + \theta(x_1 - x_2)(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) f(x_2, x_1) \\
&- \delta(x_1 - x_2)(\partial_{x_1} - \partial_{x_2}) \left[f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1) \right]
\end{aligned}$$

Т.к. $(\partial_{x_1} - \partial_{x_2}) \left[f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1) \right] = i(A_{12} - A_{21})(p_1 - p_2)(e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} + e^{i(p_2 x_1 + p_1 x_2)})$, и в членах с δ-функцией можно положить $x_2 = x_1$, окончательно имеем:

$$\hat{H}_N \Psi = (p_1^2 + p_2^2)\Psi + 2\delta(x_1 - x_2)\Big(c(A_{12} + A_{21}) + i(A_{12} - A_{21})(p_1 - p_2) \Big) e^{i(p_1 + p_2) x_1}$$

Потребовав зануления последнего члена, приходим к тому же соотношению (1.56).

В случае N частиц волновую функцию в секторе $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leq L$ пишем в виде

$$\Psi = \sum_{\sigma \in S_N} A_\sigma \exp\Big(i \sum_{j=1}^{N} p_{\sigma(j)} x_j \Big) \tag{1.57}$$

с граничными условиями

$$\Big(\partial_{x_{j+1}} - \partial_{x_j} - c\Big)\Psi\Big|_{x_j=x_{j+1}-0} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Данные условия получаются совершенно аналогично случаю двух частиц. А именно, рассмотрим волновую функцию как функцию от x_j и x_{j+1} при $x_j \to x_{j+1} - 0$, вместо x_j, x_{j+1} введем координаты $x = x_{j+1} - x_j$ и $X = \frac{1}{2}(x_{j+1} + x_j)$ и проинтегрируем уравнение Шредингера по x от 0 до ε при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. Точная волновая функция N-частичного гамильтонана (1.52) в секторе $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N \le L$ имеет вид

$$\Psi = C \prod_{m<n} \Big(i\partial_{x_m} - i\partial_{x_n} - ic\Big) \det_{1\le j,k\le N} \Big(e^{ip_j x_k}\Big) \tag{1.58}$$

Для доказательства нужно проверить, что она представляется в виде (1.57), и что выполняются граничные условия. Первое очевидно из разложения детерминанта,

$$\Psi = C \sum_{\sigma\in S_N} (-1)^{[\sigma]} \prod_{m<n} (p_{\sigma(m)} - p_{\sigma(n)} - ic)\, \exp\Big(i\sum_{j=1}^{N} p_{\sigma(j)} x_j\Big) \tag{1.59}$$

а второе удобнее проверять в форме (1.58), не раскладывая детерминант. Проверим, например, условие $(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi\Big|_{x_1=x_2-0} = 0$. Для этого заметим, что $\Psi = -i(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} + c)\tilde{\Psi}$, где

$$\tilde{\Psi} = C \prod_{j=3}^{N} \Big(i\partial_{x_1} - i\partial_{x_j} - ic\Big)\Big(i\partial_{x_2} - i\partial_{x_j} - ic\Big) \times \prod_{3\le m<n\le N} \Big(i\partial_{x_m} - i\partial_{x_n} - ic\Big) \det_{1\le j,k\le N} \Big(e^{ip_j x_k}\Big)$$

Функция $\tilde{\Psi}$, очевидно, антисимметрична относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$. Переписав левую часть интересующего нас условия $(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi\Big|_{x_1=x_2-0} = 0$ в виде $-i\left((\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^2 - c^2\right)\tilde{\Psi}$, видим, что она антисимметрична относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$, и, следовательно, равна 0.

Следствие. Точная волновая функция N-частичного гамильтонана (1.52) симметризованная по всем частицам, имеет вид

$$\Psi_N^{\mathrm{symm}} = C_N \sum_{\sigma\in S_N} (-1)^{[\sigma]} \prod_{m<n} \Big(p_{\sigma(m)} - p_{\sigma(n)} + ic\,\mathrm{sign}\,(x_m - x_n)\Big) \exp\Big(i\sum_{j=1}^{N} p_{\sigma(j)} x_j\Big). \tag{1.60}$$

Если надо указать зависимость волновой функции от координат и параметров, будем писать $\Psi_N^{\mathrm{symm}} = \Psi_N^{\mathrm{symm}}(\{x_i\}|\{p_i\})$.

Нормировочную константу C_N (она зависит от N и всех параметров p_i) можно определить из условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \ldots dx_N \Psi_N^{\mathrm{symm}}(\{x_i\}|\{p_i\}) \Psi_N^{\mathrm{symm}}(\{x_i\}|\{p'_i\}) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \delta(p_i - p'_i) \tag{1.61}$$

При этом предполагается, что параметры p_i, p'_i лежат в области $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$, $p'_1 < p'_2 < \ldots < p'_N$. Выполняется также соотношение полноты

$$\int_{\mathbb{R}^N} dp_1 \ldots dp_N \Psi_N^{\mathrm{symm}}(\{x_i\}|\{p_i\}) \Psi_N^{\mathrm{symm}}(\{x'_i\}|\{p_i\}) = (2\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \delta(x_i - x'_i) \tag{1.62}$$

При этом предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_N$.

Задача. Показать, что нормировочная константа C_N дается формулой

$$C_N = \left\{ N! \prod_{j<k} \left[(p_j - p_k)^2 + c^2 \right] \right\}^{-1/2} \tag{1.63}$$

и проверить условия нормировки и полноты.

Предельный случай $c \to \infty$ соответствует системе непроницаемых бозе-частиц. В этом случае волновая функция Ψ в секторе $x_1 < \ldots < x_N$ совпадает с таковой для N свободных фермионов, т.е. $\det_{jk}(e^{ip_j x_k})$ ("слэтеровский детерминант"), а $\Psi^{\mathrm{symm}} \propto \det_{jk} e^{ip_j x_k} \prod_{j<k} \mathrm{sign}\,(x_j - x_k)$.

Итак, точные собственные функции N-частичного гамильтонана (1.52) (волновые функции Бете) имеют вид (1.59), (1.58) или в симметризованном варианте (1.60). Они параметризуются N числами $p_1, \ldots, p_N$. Собственные значения импульса и энергии для них:

$$P = \sum_{j=1}^{N} p_j\,, \qquad E = \sum_{j=1}^{N} p_j^2. \tag{1.64}$$

Отметим, что из представления (1.58) очевидно, что волновая функция тождественно зануляется если найдется такая пара индексов $j \neq k$, для которых $p_j = p_k$ (принцип Паули для одномерных бозонов).

1.2.2 Уравнения Бете

Наложение периодических граничных условий (т.е. помещение частиц на отрезок длины L с отождествленными концами) ведет к уравнениям на возможные значения параметров p_j.

Кажется очевидным, что надо потребовать периодичности функции Ψ^{symm} по каждому аргументу, т.е. $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, \ldots, x_j + L, \ldots, x_N) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N)$ для всех j, как это часто делают в обзорах и лекционных курсах. Однако, это *неверно*! Пример $N = 2$ показывает, что условия $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1 + L, x_2) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$ и $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2 + L) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$, вообще говоря, противоречивы (!). Первое дает уравнения Бете $e^{ip_1 L} = A_{12}/A_{21}$, $e^{ip_2 L} = A_{21}/A_{12}$, а второе – условия квантования импульсов свободных частиц в ящике $e^{ip_1 L} = e^{ip_2 L} = 1$. Казалось бы, это противоречит симметрии волновой функции. В действительности симметрия не нарушается, поскольку правильный способ действий состоит в том, чтобы условие $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1 + L, x_2) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$ накладывать при $x_1 < x_2$, а условие $\Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2 + L) = \Psi^{\mathrm{symm}}(x_1, x_2)$ – при $x_1 > x_2$, но все равно это выглядит несколько странно.

Задача. Попробовать самостоятельно разобраться с тем, что здесь происходит.

Объяснение всех этих "странностей" в том, что прежде чем накладывать периодические граничные условия, необходимо модифицировать потенциал взаимодействия в уравнении Шредингера, сделав его L-периодическим, т.е. вместо $\delta(x)$ написать $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x + kL)$. Иначе возникнет несогласованность, которая и проявилась в приведенном выше примере. Поэтому возможны два способа действий, которые не следует смешивать. Первый – модифицировать волновую функцию (1.60) так, чтобы она решала уравнение Шредингера с периодическим δ-образным потенциалом, а уже потом требовать ее периодичности. Второй – оставить решение как есть, но ограничиться в рассмотрении конфигурациями, в которых разность координат любой пары частиц по модулю не превышает L (тогда работает только одна δ-функция, и решение модифицировать не надо). Можно, например, ограничиться сектором $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < L + a$ с любым a.

Рассуждения, близкие к тем, которые были использованы при выводе условия периодичности в XXX-модели, приводят к условию

$$\boxed{\begin{array}{c}\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \Psi(x_2, x_3, \ldots x_N, x_1 + L) \\[1em] \text{в секторе} \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_N\end{array}} \tag{1.65}$$

Оно эквивалентно системе уравнений Бете на параметры p_j:

$$e^{ip_jL} = \prod_{k \neq j} \frac{p_j - p_k + ic}{p_j - p_k - ic}, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{1.66}$$

Можно показать, что в отличие от XXX-модели, все их решения при $c > 0$ вещественны.

Задача. Дать подробный вывод условия периодичности для $N = 2$ и $N = 3$ первым и вторым из указанных выше способов, а потом вывести из него уравнения Бете.

Отметим, что после замены $p_j = \lambda_j$ правые части уравнений Бете для XXX-модели и бозе-газа совпадают. На самом деле это общая закономерность – возможный вид правых частей уравнений Бете диктуется общими интегрируемыми структурами (которые пока остаются за кадром), и позволяет разделить квантовые интегрируемые модели на небольшое число классов, а левые части могут выражаться через произвольную функцию от λ, которая задает конкретную модель внутри класса. Так, мы видим, что XXX-магнетик и бозе-газ относятся к одному классу, а XXZ-магнетик – к другому. Уместна аналогия с теорией представлений – правые части уравнений Бете аналогичны структурным константам алгебры, а левые – выбору ее представления.

Имея в виду это замечание, будем писать уравнения Бете для бозе-газа в терминах λ:

$$\boxed{e^{i\lambda_jL} = \prod_{k \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k - ic}, \qquad j = 1, \ldots, N} \tag{1.67}$$

Модель бозе-газа характеризуется тем, что в ней параметр λ наиболее просто связан с импульсом частицы.

Для анализа этой системы уравнений полезно их прологарифмировать:

$$L\lambda_j + \sum_{k \neq j} \tilde{\Phi}(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi \tilde{n}_j \tag{1.68}$$

Здесь $\tilde{\Phi}(\lambda) = i \log \dfrac{\lambda + ic}{\lambda - ic}$, а $\tilde{n}_j$ – какие-то целые числа. Вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$ удобно ввести антисимметричную функцию

$$\Phi(\lambda) = \tilde{\Phi}(\lambda) + \pi = 2\mathrm{arctg}\Big(\lambda/c\Big) \tag{1.69}$$

и переопределить числа $\tilde{n}_j$, введя $n_j = \tilde{n}_j + \frac{1}{2}(N-1)$ (при четных N эти числа будут полуцелыми). Тогда наши уравнения примут вид

$$\boxed{L\lambda_j + \sum_k \Phi(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi n_j} \tag{1.70}$$

(отметим, что поскольку $\Phi(0) = 0$, в сумме можно снять ограничение $k \neq j$). Их мы тоже будем называть уравнениями Бете. Запись в форме (1.70) предпочтительнее, поскольку можно доказать (см. ниже), что решения этой системы, такие, что $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$, существуют и единственным образом определяются наборами целых или полуцелых чисел n_j, среди которых нет совпадающих.

Лемма. Если $n_j > n_k$, то $\lambda_j > \lambda_k$; если $n_j = n_k$, то $\lambda_j = \lambda_k$.

Для доказательства рассмотрим разность двух уравнений системы:

$$L(\lambda_j - \lambda_k) + 2\sum_{l=1}^{N}\Big(\operatorname{arctg}\left((\lambda_j - \lambda_l)/c\right) - \operatorname{arctg}\left((\lambda_k - \lambda_l)/c\right)\Big) = 2\pi(n_j - n_k)$$

Поскольку arctg – монотонно возрастающая функция, левая часть положительна если и только если $\lambda_j > \lambda_k$ и равна 0 если и только если $\lambda_j = \lambda_k$. Поэтому при $n_j > n_k$ должно быть $\lambda_j > \lambda_k$, а при $n_j = n_k$ должно быть $\lambda_j = \lambda_k$.

Лемма. Функционал энергии $E = \sum \lambda_j^2$ в модели с N частицами минимизируется на состоянии со следующим набором чисел n_j:

$$n_j = -\frac{N+1}{2} + j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.71}$$

Иными словами, в основном состоянии числа n_j заполняют интервал от $-\frac{1}{2}(N-1)$ до $+\frac{1}{2}(N-1)$, следуя через 1 без пропусков. Это более-менее понятно из соображений симметрии, но в литературе можно найти и строгое доказательство.

Задача. Показать, что в состоянии, которое характеризуется числами n_j, полный импульс равен $P = \dfrac{2\pi}{L}\sum_j n_j$.

1.2.3 Действие Янга

Перенесем все члены в уравнениях Бете (1.70) в одну часть и обозначим

$$\mathcal{B}_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \equiv L\lambda_j - 2\pi n_j + \sum_k \Phi(\lambda_j - \lambda_k)$$

тогда уравнения Бете гласят, что $\mathcal{B}_j = 0$.

Задача. Показать, что

$$\frac{\partial \mathcal{B}_j}{\partial \lambda_l} = \frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial \lambda_j} \tag{1.72}$$

Отсюда следует, что существует функция $\mathcal{Y}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, такая, что $\mathcal{B}_j = \partial\mathcal{Y}/\partial\lambda_j$. Функция $\mathcal{Y}$ называется действием Янга (или Янга-Янга) и играет важную роль.

Уравнения Бете получаются как условия экстремума действия Янга,

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \lambda_j} = 0\,.$$

Для модели бозе-газа

$$\mathcal{Y} = \frac{L}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 - 2\pi\sum_{j=1}^{N} n_j\lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}\Phi_1(\lambda_j-\lambda_k) \tag{1.73}$$

где

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^\lambda \Phi(\mu)d\mu = 2\lambda\,\mathrm{arctg}\,(\lambda/c) - c\log\Bigl(1+\frac{\lambda^2}{c^2}\Bigr) \quad -$$

первообразная функции $\Phi(\lambda)$.

На самом деле возможность сформулировать уравнения Бете в виде вариационного принципа является общим фактом и имеет место также и для других моделей. Случай бозе-газа с отталкиванием выделен тем, что для него функция Янга обладает особенно хорошими свойствами, позволяющими строго доказать такое, например, утверждение.

Теорема. Решения системы (1.70) существуют и единственным образом определяются наборами целых или полуцелых чисел n_j.

Как уже говорилось, уравнения Бете (1.70) получаются как условия экстремума функции Янга, $\partial\mathcal{Y}/\partial\lambda_j = 0$. Утверждение теоремы следует из того, что функция Янга выпукла, а потому этот экстремум является минимумом, и он единствен. Для доказательства выпуклости функции Янга достаточно проверить, что матрица вторых производных (гессиан) $\mathcal{Y}_{jk} = \partial^2\mathcal{Y}/\partial\lambda_j\partial\lambda_k$ является положительно определенной, т.е. все ее собственные значения положительны. Эта матрица имеет вид

$$\mathcal{Y}_{jk} = \delta_{jk}\Bigl(L + \sum_{l=1}^{N} K(\lambda_j-\lambda_l)\Bigr) - K(\lambda_j-\lambda_k)$$

где

$$K(\lambda-\mu) = \Phi'(\lambda-\mu) = \frac{2c}{(\lambda-\mu)^2+c^2}\,. \tag{1.74}$$

Для любого вещественного вектора v_j имеем:

$$\sum_{jk}\mathcal{Y}_{jk}v_jv_k = L\sum_j v_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\neq j}K(\lambda_j-\lambda_k)(v_j-v_k)^2 > 0$$

(здесь важно, что $c>0$). Это означает, что матрица $\mathcal{Y}_{jk}$ положительно определена при всех λ_j, функция $\mathcal{Y}$ выпукла и имеет единственный минимум.

Для моделей XXX и XXZ выпуклость функции Янга, вообще говоря, не имеет места, и поэтому строгие доказательства аналогичных утверждений затруднены.

Важность матрицы $\mathcal{Y}_{jk}$ обусловлена также тем, что через ее детерминант выражается квадрат нормы бетевского состояния системы в конечном объеме. Именно, для функции Ψ_N^{symm} (1.60) с константой C_N как в (1.63) и импульсами $p_j=\lambda_j$, удовлетворяющими системе уравнений Бете, верно следующее:

$$\int_0^L\!\!\dots\int_0^L |\Psi_N^{\mathrm{symm}}|\,dx_1\dots dx_N = \det_{1\le j,k\le N}\mathcal{Y}_{jk} \tag{1.75}$$

Подчеркнем, что это утверждение верно *только* для состояний, параметры λ_j в которых удовлетворяют уравнениям Бете. Прямая проверка этой формулы нетривиальна уже в случае $N = 2$.

Задача. Найти явный вид функции Янга для XXX-модели.

1.2.4 Решение уравнений Бете в термодинамическом пределе

Под термодинамическим пределом мы понимаем предел $N \to \infty$, $L \to \infty$, причем величина $\rho_0 = N/L$, которая имеет смысл средней плотности частиц в конфигурационном пространстве, остается конечной.

Основное состояние. Сначала исследуем основное состояние (вакуум). Согласно приведенной выше лемме, числа n_j надо выбирать как в (1.71). Полный импульс равен 0. Числа n_j и λ_j располагаются без пропусков симметрично относительно 0, образуя аналог моря Дирака. В пределе числа λ_j располагаются на некотором интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ все теснее друг к другу. Введем плотность их распределения формулой

$$\rho(\lambda_j) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{1}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \tag{1.76}$$

Эта функция позволяет заменять суммы на интегралы по правилу

$$\sum_j f(\lambda_j) = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(\lambda)\rho(\lambda) d\lambda$$

Возьмем два соседних уравнения (1.70) (для $j+1$ и j) и вычтем их друг из друга:

$$L(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \sum_k \left[\Phi(\lambda_{j+1} - \lambda_k) - \Phi(\lambda_j - \lambda_k)\right] = 2\pi$$

Считая разность $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ малой, разложим выражение под знаком суммы в ряд Тейлора и оставим первый член. Разделив после этого обе части на $L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$, будем иметь:

$$1 + \frac{1}{L}\sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k) = \frac{2\pi}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} \tag{1.77}$$

Заменяя сумму на интеграл и вспоминая определения плотности (1.76) и функции $K(\lambda - \mu)$ (1.74), окончательно получим интегральное уравнение на функцию распределения плотности:

$$\boxed{2\pi\rho(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu)\rho(\mu) d\mu = 1} \tag{1.78}$$

Несколько более формальный способ вывести это уравнение из исходных данных заключается в том, чтобы определить функцию плотности формулой $\rho(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{N} \delta(\lambda - \lambda_j)$ и сразу представить (1.70) как интегральное уравнение

$$\lambda + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \Phi(\lambda - \mu)\rho(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi n(\lambda)}{L}$$

где $n(\lambda) = \sum_j \theta(\lambda - \lambda_j)$ – неубывающая ступенчатая функция, которая "считает", сколько импульсов находится слева от точки λ. Дифференцируя по λ, приходим к (1.78). При этом сингулярная функция $\rho(\lambda)$ в пределе становится непрерывной – пики сгущаются, а их высота уменьшается.

В отличие от XXX-модели, решение этого уравнения не выражается через известные функции (из-за конечности пределов), но может быть эффективно найдено численно, и, кроме того, можно доказать ряд строгих утверждений о существовании решения и его основных свойствах. Мы не будем на этом останавливаться.

Величина Λ (импульс Ферми) определяется из условия нормировки

$$\rho_0 = \frac{N}{L} = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda \tag{1.79}$$

Энергия основного состояния дается формулой

$$E^{(0)} = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda \tag{1.80}$$

Элементарные возбуждения. Покажем на простейшем примере, как техника анзаца Бете позволяет строить возбужденные состояния (собственные состояния гамильтониана с энергией $E > E^{(0)}$). В физике основной интерес представляют низколежащие возбуждения, т.е. такие, что $E - E^{(0)}$ остается конечной при $L \to \infty$. Они интерпретируются как физически наблюдаемые "одетые" частицы и их состояния рассеяния, в отличие от "голых" частиц, в терминах которых был написан исходный гамильтониан.

Мы ограничимся состояниями, в которых число частиц не меняется. Простейшие возбуждения соответствуют выбору последовательности целых или полуцелых чисел n_j в следующем виде:

$$\{n_j\} = \Big\{-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2} - m^h - 1, \frac{N-1}{2} - m^h + 1, \ldots, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} + m^p\Big\}$$

Здесь m^h и m^p – целые положительные числа. Это можно интерпретировать как рождение "частицы" в месте m^p и "дырки" в месте m^h (последнее означает изъятие числа $\frac{N-1}{2} - m^h$ из последовательности). Будем считать, что $m^h < \frac{N-1}{2}$, так что изъятие происходит в правой половине последовательности. Соответственно, можно ввести импульс добавленной частицы λ^p как параметр Бете, отвечающий добавленному числу $\frac{N-1}{2} + m^p$ и импульс дырки λ^h как параметр Бете, отвечавший изъятому числу $\frac{N-1}{2} - m^h$ в вакуумном решении.

При этом важно заметить, что полный импульс возбужденного состояния *не равен* $\lambda^p - \lambda^h$ (а равен $P = \frac{2\pi}{L}(m^p + m^h)$), поскольку в новом решении уравнений Бете значения всех остальных параметров λ_j немного подвинулись по сравнению с их вакуумными значениями. А так как их много ($O(N)$), суммарный вклад таких изменений может быть $O(1)$, т.е. того же порядка, что и $\lambda^p - \lambda^h$. Физики говорят, что $\lambda^p - \lambda^h$ – "голый" импульс возбуждения, а $\frac{2\pi}{L}(m^p + m^h)$ – наблюдаемый или "одетый" импульс, обусловленный взаимодействием. Отметим, что при $c = \infty$ они совпадают.

Чтобы найти реакцию "моря Дирака" на создание частицы и дырки, воспользуемся уже проверенным приемом – вычтем друг из друга уравнения Бете для возбужденного и вакуумного состояний и разложим по малым $\delta\lambda_j = \tilde{\lambda}_j - \lambda_j = O(1/L)$. Здесь

λ_j – значение j-го корня Бете для основного состояния, а $\tilde{\lambda}_j$ – для возбужденного. Мы получим, для $1 \le j \le N - m^h - 1$:

$$(\tilde{\lambda}_j - \lambda_j)L + \sum_k \Big[\Phi(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) - \Phi(\lambda_j - \lambda_k)\Big] = \Phi(\lambda_j - \lambda^h) - \Phi(\tilde{\lambda}_j - \lambda^p).$$

Слагаемые, содержащие целые числа n_j, сократились, поскольку эти числа в обоих состояниях одинаковы для всех таких j. Члены, отвечающие частице и дырке, перенесены в правую часть. После разложения по малым $\delta\lambda_j = \tilde{\lambda}_j - \lambda_j$ эти уравнения в лидирующем порядке примут вид

$$\delta\lambda_j L + \delta\lambda_j \sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k) - \sum_k \Phi'(\lambda_j - \lambda_k)\delta\lambda_k = \Phi(\lambda_j - \lambda^h) - \Phi(\lambda_j - \lambda^p)$$

где в правой части мы заменили $\tilde{\lambda}_j$ на λ_j, поскольку разница заметна только в следующем порядке. Первые два члена в левой части можно преобразовать, воспользовавшись (1.77):

$$2\pi \, \frac{\tilde{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} - \frac{1}{L} \sum_k K(\lambda_j - \lambda_k) \, \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \, L(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \Phi(\lambda_j - \lambda^h) - \Phi(\lambda_j - \lambda^p)$$

Введя *функцию сдвига*

$$F(\lambda_j|\lambda^h, \lambda^p) = \lim_{N,L\to\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} = \lim_{N,L\to\infty} \Big(L\delta\lambda_j \rho(\lambda_j)\Big)$$

запишем то, что получилось, в виде интегрального уравнения

$$\boxed{2\pi F(\lambda|\lambda^h, \lambda^p) - \int_{-\lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) F(\mu|\lambda^h, \lambda^p) d\mu = \Phi(\lambda - \lambda^h) - \Phi(\lambda - \lambda^p)} \qquad (1.81)$$

Здесь $\lambda^h < \Lambda$, а $\lambda^p > \Lambda$. Энергия данного состояния выразится в виде

$$\begin{aligned} E - E^{(0)} &= (\lambda^p)^2 - (\lambda^h)^2 + \sum_j (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_j^2) = (\lambda^p)^2 - (\lambda^h)^2 + 2\sum_j \lambda_j \delta\lambda_j \\ &= (\lambda^p)^2 - (\lambda^h)^2 + 2\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \lambda F(\lambda|\lambda^h, \lambda^p) d\lambda \end{aligned} \qquad (1.82)$$

Импульс же равен

$$\begin{aligned} P = \frac{2\pi}{L}(m^h + m^p) &= \lambda^p - \lambda^h + \sum_j (\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) \\ &= \lambda^p - \lambda^h + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} F(\lambda|\lambda^h, \lambda^p) d\lambda \end{aligned} \qquad (1.83)$$

1.2.5 Термодинамика модели при конечной температуре

Счет состояний: частицы и дырки. Взаимно-однозначное соответствие между состояниями и наборами несовпадающих целых или полуцелых чисел $\{n_j\}_{j=1}^N$ позволяет относительно просто проанализировать термодинамику модели при конечной температуре. В дальнейшем будем для простоты считать, что числа n_j – целые.

Зададимся каким-нибудь решением уравнений Бете в виде набора (вещественных) чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$, среди которых нет совпадающих. Рассмотрим функцию

$$y(\lambda) = \lambda + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{N}\Phi(\lambda - \lambda_k) \tag{1.84}$$

Она монотонно возрастает с увеличением λ, и $y(\pm\infty) = \pm\infty$. Пусть $\{\bar{n}_j\}_{j=1}^N$ – набор целых чисел, дополнительный к $\{n_j\}_{j=1}^N$: $\{\bar{n}_j\}_{j=1}^N = \mathbb{Z} \setminus \{n_j\}_{j=1}^N$. Введем следующую терминологию.

- Те $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для которых $y(\lambda_j) = \dfrac{2\pi n_j}{L}$, назовем *частицами*;
- Те $\lambda_k \in \mathbb{R}$, для которых $y(\lambda_k) = \dfrac{2\pi \bar{n}_k}{L}$, назовем *дырками*.

Совокупность *всех* решений уравнения $y(\lambda) \in 2\pi\,\mathbb{Z}/L$ (при данных $\{n_j\}_{j=1}^N$) иногда называют вакансиями. Очевидно, вакансия – это либо частица, либо дырка. Частицы еще называют занятыми вакансиями, а дырки – свободными.

Функция ρ плотности распределения частиц вводится формулой (1.76) так же, как и раньше. Аналогичную функцию $\bar{\rho}$ можно ввести и для дырок. В случае основного состояния и простейших возбуждений на интервале от $-\Lambda$ до Λ дырок не было или их количество оставалось конечным в термодинамическом пределе, поэтому функция $\bar{\rho}$ была не нужна (была равна 0 на интересующем нас интервале). Теперь же обе функции, вообще говоря, отличны от нуля на всей оси. Итак:

- Плотность частиц: $L\rho(\lambda)d\lambda$ – число частиц на отрезке $[\lambda, \lambda + d\lambda]$;
- Плотность дырок: $L\bar{\rho}(\lambda)d\lambda$ – число дырок на отрезке $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

Плотность вакансий будет тогда $\rho(\lambda) + \bar{\rho}(\lambda)$. Из определений сразу следует, что $y'(\lambda) = 2\pi(\rho(\lambda) + \bar{\rho}(\lambda))$. В самом деле, величина $\frac{L}{2\pi}\Big(y(\lambda + \delta\lambda) - y(\lambda)\Big)$ – это количество "проходов" функции $\frac{L}{2\pi}\,y(\lambda)$ через целое число, т.е. количество вакансий в интервале $\delta\lambda$. Дифференцируя (1.84), получаем интегральное уравнение, связывающее плотности частиц и дырок:

$$\boxed{2\pi(\rho(\lambda) + \bar{\rho}(\lambda)) - \int K(\lambda - \mu)\rho(\mu)\,d\mu = 1} \tag{1.85}$$

По умолчанию здесь и далее интегрирование идет от $-\infty$ до ∞. Напомним, что $K(\lambda) = \dfrac{2c}{\lambda^2 + c^2}$. По смыслу это уравнение полностью аналогично уравнениям Бете в форме (1.70): задаем плотность дырок $\bar{\rho}$ (это аналогично выбору какой-то определенной последовательности целых чисел n_j в (1.70)), и тогда плотность частиц ρ найдется из интегрального уравнения.

Макроскопическое описание: энтропия. Метод статистической термодинамики заключается в отказе от слежения за отдельными состояниями (с помощью чисел n_j) и в переходе к описанию в терминах плотности частиц и дырок. При этом данному макроскопическому состоянию (фиксированной функции ρ) соответствует много разных микроскопических состояний (наборов чисел n_j). Действительно, имеется

$$\delta\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\Big[L(\rho(\lambda) + \bar\rho(\lambda)d\lambda]!}{\Big[L\rho(\lambda)d\lambda\Big]!\,\Big[L\bar\rho(\lambda)d\lambda\Big]!}$$

возможностей разместить $L\rho(\lambda)d\lambda$ частиц в $L(\rho(\lambda)+\bar\rho(\lambda)d\lambda$ вакансиях, не меняя макроскопические функции распределения. В термодинамическом пределе это большое число. Применив формулу Стирлинга $\log n! = n\log n - n + \ldots$, получим приращение энтропии $\delta S_N(\lambda) = \log\delta\mathcal{N}(\lambda)$:

$$\delta S_N(\lambda) = \Big[(\rho(\lambda) + \bar\rho(\lambda))\log(\rho(\lambda) + \bar\rho(\lambda)) - \rho(\lambda)\log\rho(\lambda) - \bar\rho(\lambda)\log\bar\rho(\lambda)\Big]Ld\lambda$$

Полная энтропия вычисляется как

$$S_N = \int \delta S_N d\lambda = L\int\Big[(\rho+\bar\rho)\log(\rho+\bar\rho) - \rho\log\rho - \bar\rho\log\bar\rho\Big]d\lambda \tag{1.86}$$

Интегральные уравнения. В термодинамическом пределе полная энергия

$$E_N = L\int \lambda^2\rho(\lambda)\,d\lambda \tag{1.87}$$

зависит только от макроскопической плотности ρ, что позволяет в статсумме перейти от суммирования по n_j к "функциональному интегрированию" по $\rho(\lambda)$ с учетом энтропии:

$$Z_N = \sum_{n_1<n_2<\ldots<n_N} e^{-\beta E_N(\{n_j\})} = \int [D\rho]\, e^{S_N-\beta E_N}$$

Здесь $\beta = 1/T$ – обратная температура. Как обычно бывает в статистической термодинамике, при $N\to\infty$ основной вклад дадут состояния, для которых $e^{S_N-\beta E_N}$ максимально. Иными словами, нам надо найти экстремум функционала

$$S_N - \beta E_N = -L\int d\lambda\,\Big[\beta\lambda^2\rho - (\rho+\bar\rho)\log(\rho+\bar\rho) + \rho\log\rho + \bar\rho\log\bar\rho\Big]$$

от плотности частиц ρ при условии, что средняя плотность держится постоянной:

$$\int\rho(\lambda)\,d\lambda = N/L = \rho_0 \tag{1.88}$$

Вводя множитель Лагранжа в виде βA и варьируя по ρ с учетом (1.85), имеем

$$\int d\lambda\,\Big[\beta(\lambda^2 - A)\delta\rho + \delta\rho\log\rho + \delta\bar\rho\log\bar\rho - (\delta\rho{+}\delta\bar\rho)\log(\rho{+}\bar\rho)\Big] = 0$$

при всех $\delta\rho$. После простых преобразований получаем условие равенства нулю вариации:

$$\beta(\lambda^2 - A) + \log\frac{\rho(\lambda)}{\bar\rho(\lambda)} - \frac{1}{2\pi}\int K(\lambda{-}\mu)\log\Big(1+\frac{\rho(\mu)}{\bar\rho(\mu)}\Big)\,d\mu = 0 \tag{1.89}$$

Введя обозначение

$$\frac{\bar{\rho}(\lambda)}{\rho(\lambda)} := e^{\beta\varepsilon(\lambda)} \tag{1.90}$$

запишем его в виде

$$\boxed{\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - A - \frac{1}{2\pi\beta}\int K(\lambda-\mu)\log\Big(1+e^{-\beta\varepsilon(\mu)}\Big)\,d\mu} \tag{1.91}$$

Это нелинейное интегральное уравнение на функцию $\varepsilon(\lambda)$, в котором A надо рассматривать как параметр. Схема решения исходной задачи такова: найденное из этого уравнения $\varepsilon(\lambda)$ (параметрически зависящее от A) надо подставить в соотношение (1.85), которое после этого превращается в уравнение Фредгольма на ρ:

$$2\pi\Big(1+e^{\beta\varepsilon(\lambda)}\Big)\,\rho(\lambda) = 1 + \int K(\lambda-\mu)\rho(\mu)\,d\mu \tag{1.92}$$

Найденное из него ρ надо подставить в условие нормировки (1.88), из которого по данному ρ_0 находится A. Зная ρ и ε, можно (в принципе) найти все интересующие нас термодинамические величины в системе.

Свободная энергия и химический потенциал. В качестве примера покажем, как выводится выражения для свободной энергии и давления. Энтропию находим по формуле (1.86), подставив в нее определение функции ε:

$$S_N = L\int(\rho+\bar{\rho})\log\Big(1+e^{-\beta\varepsilon}\Big)d\lambda + L\beta\int\varepsilon\rho\,d\lambda \tag{1.93}$$

Далее, домножим обе части уравнения (1.91) на $\rho(\lambda)$ и затем проинтегрируем по λ. Пользуясь уравнением (1.92), результат запишем в виде

$$L\int(\rho+\bar{\rho})\log\Big(1+e^{-\beta\varepsilon}\Big)\,d\lambda = L\beta\int(\lambda^2-\varepsilon)\rho\,d\lambda - \beta NA + \frac{L}{2\pi}\int\log\Big(1+e^{-\beta\varepsilon}\Big)\,d\lambda \tag{1.94}$$

где левая часть как раз совпадает с первым слагаемым в правой части (1.93). Поэтому формулу для энтропии (1.93) можно несколько упростить:

$$S_N = L\beta\int\lambda^2\rho\,d\lambda - \beta NA + \frac{L}{2\pi}\int\log\Big(1+e^{-\beta\varepsilon}\Big)\,d\lambda \tag{1.95}$$

Для свободной энергии $F_N = E_N - TS_N$ (здесь и ниже удобно подставить $\beta = 1/T$) получаем тогда выражение

$$\boxed{F_N = NA - \frac{LT}{2\pi}\int\log\Big(1+e^{-\varepsilon/T}\Big)\,d\lambda} \tag{1.96}$$

Давление находится по формуле

$$\mathcal{P} = -\Big(\frac{\partial F_N}{\partial L}\Big)_T = -N\frac{\partial A}{\partial L} - \frac{L}{2\pi}\int\frac{d\lambda}{1+e^{\varepsilon/T}}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial A}\,\frac{\partial A}{\partial L} + \frac{T}{2\pi}\int\log\Big(1+e^{-\varepsilon/T}\Big)\,d\lambda$$

Частную производную $\partial\varepsilon/\partial A$ найдем, продифференцировав интегральное уравнение (1.91) по параметру A. Мы получим:

$$-\frac{\partial\varepsilon(\lambda)}{\partial A} = 1 - \frac{1}{2\pi}\int K(\lambda-\mu)\,\frac{\partial\varepsilon(\mu)/\partial A}{1+e^{\varepsilon(\mu)/T}}\,d\mu$$

Сравнив с уравнением (1.92), видим, что величина $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varepsilon/\partial A}{1+e^{\varepsilon/T}}$ как функция λ удовлетворяет тому же интегральному уравнению (1.92), что и функция $\rho(\lambda)$. В силу единственности решения этого последнего (что можно доказать отдельно) отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial A} = -2\pi\rho\left(1+e^{\varepsilon/T}\right)$$

Подставив это в правую часть формулы для давления и вспомнив условие нормировки, видим, что первые два члена в правой части сокращают друг друга. Таким образом, приходим к следующему замечательному результату:

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{T}{2\pi}\int \log\left(1+e^{-\varepsilon(\lambda)/T}\right)d\lambda} \tag{1.97}$$

Сравнивая с (1.96), получаем известную термодинамическую формулу

$$F_N = -L\mathcal{P} + NA$$

из которой очевидно, что A имеет смысл химического потенциала системы. На самом деле можно было бы с самого начала считать заданным не ρ_0, а A, тогда схема решения несколько упрощается.

Каков же смысл функции $\varepsilon(\lambda)$? Оказывается, $\varepsilon(\lambda)$ – это энергия возбуждения над состоянием термодинамического равновесия. Интуитивно это можно понять из того простого соображения, что отношение числа занятых вакансий (т.е. частиц) к числу всех вакансий в малом интервале $\delta\lambda$ равно

$$\frac{\rho(\lambda)}{\rho(\lambda)+\bar{\rho}(\lambda)} = \frac{1}{1+e^{\beta\varepsilon(\lambda)}}$$

что совпадает с распределением Ферми-Дирака. Отметим также, что полученные формулы для давления и свободной энергии выглядят как написанные для газа невзаимодействующих фиктивных "ферми-частиц" с энергиями $\varepsilon(\lambda)$. В частности, при $c=\infty$ эти фиктивные частицы можно отождествить с настоящими, в терминах которых писался исходный гамильтониан. При этом $\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - A$, как и должно быть для свободных нерелятивистских частиц.

На этом мы заканчиваем описание термодинамики модели. Более глубокий анализ выходит за рамки нашего курса.

2 Модели статистической механики на двумерной решетке (вершинные модели)

Этот раздел служит переходным этапом от изучения конкретных моделей к анализу общих алгебраических структур, лежащих в основе квантовой интегрируемости. Здесь обсуждается 6-вершинная модель на квадратной решетке – модель совершенно другого типа по сравнению с уже рассмотренными (и даже из другой области физики), точное решение которой, однако, оказывается возможным с помощью некоторой модификации того же метода Бете. Вместе с тем 6-вершинная модель оказывается тесно связанной с XXZ-цепочкой и позволяет построить коммутирующие интегралы движения для последней, т.е. операторы, коммутирующие с гамильтонианом и друг с другом. В контексте 6-вершинной модели можно наиболее наглядно ввести общие понятия квантового метода обратной задачи (трансфер-матрица R-матрица и др.) и развить алгебраический вариант метода Бете, применимый к широкому кругу квантовых интегрируемых систем.

2.1 Общая вершинная модель на квадратной решетке

Рассмотрим решетку размера $N \times M$ с квадратными ячейками, свернутую в тор, т.е. плоскую решетку с $M+1$ строками и $N+1$ столбцами, у которой крайние строки и столбцы отождествлены. Пусть на каждом горизонтальном ребре нарисована стрелка, ориентированная влево или вправо, а на каждом вертикальном – вверх или вниз. Поскольку в каждом узле решетки сходятся 4 ребра, имеем 16 возможных комбинаций стрелок на них (типов вершин). Припишем каждой возможной комбинации $j = 1, \ldots, 16$ число ε_j (энергию данной локальной конфигурации). Полная энергия, отвечающая некоторой расстановке стрелок на всех ребрах, находится тогда как сумма локальных энергий по всем узлам:

$$E = \sum_{j=1}^{16} N_j \varepsilon_j$$

где N_j – число узлов с комбинацией стрелок типа j в данной конфигурации. Полезно также ввести величины $w_j = e^{-\varepsilon_j/T}$, которые называются локальными больцмановскими весами (они считаются одинаковыми для всех узлов). Статсумма равна

$$Z = \sum e^{-E/T} = \sum \prod_j w_j^{N_j}$$

где суммирование производится по всем конфигурациям стрелок на решетке, а E – полная энергия конфигурации. Обычно интерес представляет вычисление свободной энергии на один узел в термодинамическом пределе как функции локальных больцмановских весов:

$$f = -T \lim_{M,N \to \infty} \frac{\log Z}{MN}$$

По понятной причине данная модель называется 16-вершинной. В общем случае она не имеет точного решения.

Отметим, что больцмановские веса некоторых локальных конфигураций могут быть равны 0 (при этом энергия равна $+\infty$). Это значит, что данные локальные конфигурации в вершине считаются запрещенными. Тогда число разрешенных типов вершин уменьшается. Таким образом получаются 8-вершинная и 6-вершинная модели, которые уже могут быть решены точно, по крайней мере в термодинамическом пределе (см. далее).

Вместо стрелок можно использовать спиновые переменные $\sigma = \pm 1$, живущие *на ребрах* решетки: если стрелка направлена вправо или вверх, $\sigma = +1$, а если влево или вниз, $\sigma = -1$. Каждой конфигурации стрелок в узле соответствуют 4 величины $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, принимающие значения ± 1. Переменные α, α' живут на вертикальных ребрах, а β, β' – на горизонтальных (рис. 1). Локальный больцмановский вес, отвечающий такой конфигурации, будем обозначать

$$R_{\alpha}^{\alpha'}(\beta, \beta') \qquad \text{или} \qquad R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$$

Рассмотрим какой-либо горизонтальный ряд решетки и прилегающие к нему снизу и сверху вертикальные ребра. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ – переменные на вертикальных ребрах нижнего ряда, а $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_N\}$ – верхнего (рис. 2). Будем пока считать их фиксированными и найдем статсумму такого горизонтального “слоя” решетки, которую обозначим через

$$T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N} \quad \text{или для краткости} \quad T_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}}$$

Для этого надо взять произведение локальных больцмановских весов и просуммировать по всем состояниям на горизонтальных ребрах:

$$T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N} = \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_N} R_{\alpha_1}^{\alpha'_1}(\beta_1, \beta_2) R_{\alpha_2}^{\alpha'_2}(\beta_2, \beta_3) \ldots R_{\alpha_N}^{\alpha'_N}(\beta_N, \beta_1) \tag{2.1}$$

Величину $T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N}$ полезно рассматривать как матричный элемент оператора T, действующего в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, взятого в базисе $|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha_N\rangle$:

$$\mathsf{T}\,|\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_N\rangle \;=\; T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N}\,|\alpha'_1\alpha'_2, \ldots, \alpha'_N\rangle$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Тогда

$$Z = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\,\mathsf{T}^M$$

где след берется в пространстве $\mathcal{H}$. Таким образом, для нахождения статсуммы достаточно найти собственные значения матрицы T. Для нахождения удельной свободной энергии в пределе $N, M \to \infty$ достаточно знать асимптотику при $N \to \infty$ наибольшего собственного значения. В силу важности матрица T имеет специальное название. Она называется *трансфер-матрицей* или матрицей перехода, поскольку описывает переход от одного горизонтального ряда вертикальных ребер к следующему. Диагонализация трансфер-матрицы – первая основная задача в теории вершинных моделей. (Вторая основная задача – нахождение корреляционных функций; она существенно сложнее.)

Обсудим подробнее структуру трансфер-матрицы. Будем считать $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$ 2×2 матрицей $R_\alpha^{\alpha'}$ по индексам β,β', у которой матричные элементы в свою очередь являются 2×2 матрицами (по индексам α,α'):

$$(R_\alpha^{\alpha'})_{\beta\beta'} = R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$$

Иными словами, рассмотрим $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta')$ как блочную матрицу. Тогда правая часть формулы (2.1) – не что иное, как матричное произведение в горизонтальном (общем для всех) пространстве $\mathbb{C}^2$ (оно называется *вспомогательным пространством*) с последующим взятием следа в нем:

$$T_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}} = T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}^{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_N} = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2}\Big(R_{\alpha_1}^{\alpha'_1}R_{\alpha_2}^{\alpha'_2}\ldots R_{\alpha_N}^{\alpha'_N}\Big)$$

Таким образом, элементарным строительным блоком является набор больцмановских весов $R_\alpha^{\alpha'}(\beta,\beta') = R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$. Их можно объединить в матрицу 4×4 и понимать ее как матрицу линейного оператора в тензорном произведении двух двумерных пространств. Тогда совокупность больцмановских весов задает линейный оператор

$$\mathsf{R}:\ \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$$

В базисе $|\beta\rangle\otimes|\alpha\rangle$ он действует так:

$$\mathsf{R}:\ |\beta\rangle\otimes|\alpha\rangle \mapsto R_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}\,|\beta'\rangle\otimes|\alpha'\rangle$$

(по повторяющимся индексам суммирование). Матрица R в базисе $|+\rangle\otimes|+\rangle$, $|+\rangle\otimes|-\rangle$, $|-\rangle\otimes|+\rangle$, $|-\rangle\otimes|-\rangle$ запишется виде

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} R_{++}^{++} & R_{++}^{-+} & R_{++}^{+-} & R_{++}^{--} \\ R_{-+}^{++} & R_{-+}^{-+} & R_{-+}^{+-} & R_{-+}^{--} \\ R_{+-}^{++} & R_{+-}^{-+} & R_{+-}^{+-} & R_{+-}^{--} \\ R_{--}^{++} & R_{--}^{-+} & R_{--}^{+-} & R_{--}^{--} \end{pmatrix}$$

Отметим, что хотя исходно все больцмановские веса были вещественными (и, более того, неотрицательными) числами, с алгебраической точки зрения удобно считать их произвольными комплексными числами.

Наконец, укажем способ компактной безындексной записи трансфер-матрицы. Если имеется тензорное произведение $V_1\otimes\ldots\otimes V_N$ одинаковых пространств $V_i\cong\mathbb{C}^2$, обозначим R_{ij} оператор, действующий на произведении $V_i\otimes V_j$ как R, а на других как тождественный оператор. Тогда

$$\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}\Big)$$

Стоящий под следом оператор $\mathcal{T} = \mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}$ также имеет специальное название. По историческим причинам (по аналогии с методом обратной задачи) он называется квантовой матрицей монодромии. Его естественно записывать как 2×2 матрицу во вспомогательном пространстве, элементы которой являются операторами в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{T} = A + D$$

Это по сути трансфер-матрица для цепочки с открытыми концами, спины на которых фиксированы.

2.2 6-вершинная модель

Будем рассматривать лишь те вершины, в которых число входящих стрелок равно числу выходящих, а остальные объявим запрещенными (их больцмановские веса положим равными 0). Таких конфигураций ровно 6 (рис. 3). Они объединяются в пары, соответствующие обращению всех стрелок. Будем считать, что больцмановские веса одинаковы для вершин, получающихся друг из друга обращением всех стрелок. Таким образом, в модели имеются 3 независимых параметра, из которых существенны лишь два, т.к. зависимость от общего множителя тривиальна. Такая модель называется (симметричной) 6-вершинной моделью.

2.2.1 Матрица больцмановских весов 6-вершинной модели

Матрица локальных больцмановских весов для 6-вершинной модели имеет вид

$$\mathsf{R}=\begin{pmatrix} R_+^+(+,+) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_-^-(+,+) & R_-^+(+,-) & 0 \\ 0 & R_+^-(-,+) & R_+^+(-,-) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_-^-(-,-) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Она называется R-матрицей. Укажем другие способы ее записи, которые в ряде случаев более удобны:

$$\begin{aligned}\mathsf{R} &= \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sigma_z & c\sigma_- \\ c\sigma_+ & \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sigma_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{a+b}{2}\sigma_0\otimes\sigma_0+\frac{a-b}{2}\sigma_z\otimes\sigma_z+\frac{c}{2}\sigma_y\otimes\sigma_y+\frac{c}{2}\sigma_x\otimes\sigma_x\end{aligned}$$

Здесь использованы введенные ранее стандартные матрицы Паули. Матрица больцмановских весов в j-м узле решетки запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_{j0} &= \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sigma_z^{(j)} & c\sigma_-^{(j)} \\ c\sigma_+^{(j)} & \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sigma_z^{(j)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{a+b}{2}\sigma_0^{(0)}\otimes\sigma_0^{(j)}+\frac{a-b}{2}\sigma_z^{(0)}\otimes\sigma_z^{(j)}+\frac{c}{2}\sigma_y^{(0)}\otimes\sigma_y^{(j)}+\frac{c}{2}\sigma_x^{(0)}\otimes\sigma_x^{(j)}\end{aligned}$$

Задача. Показать, что вектор $|\Omega\rangle=|+++\ldots+\rangle$ является собственным для трансфер-матрицы $\mathsf{T}=\mathrm{tr}_{V_0}\Big(\mathsf{R}_{01}\mathsf{R}_{02}\ldots\mathsf{R}_{0N}\Big)$ и найти собственное значение. (Можно показать, что при $a>b+c$ это максимальное собственное значение.)

Задача. Показать, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с оператором циклического сдвига e^{iP} и оператором $S_z=\sum\limits_{j=1}^{N}\sigma_z^{(j)}$: $[\mathsf{T},e^{iP}]=[\mathsf{T},S_z]=0$.

Коммутационное соотношение $[\mathsf{T},S_z]=0$ означает, что количество стрелок, направленных вниз (аналог перевернутых спинов), сохраняется под действием оператора T, т.е. не меняется от слоя к слою. Поэтому собственные векторы можно искать в секторах с фиксированным числом перевернутых стрелок. Например, собственный вектор в N-мерном подпространстве с одной перевернутой стрелкой можно искать в виде

$$\sum_{n=1}^{N} z^n \sigma_-^{(n)} |\Omega\rangle$$

где z – комплексное число, удовлетворяющее условию $z^N = 1$ (в силу периодических граничных условий). Явное построение собственных векторов можно провести и в секторе с произвольным числом перевернутых стрелок, причем оно оказывается абсолютно аналогичным решению XXZ-модели координатным анзацем Бете! (Исторически модель была впервые решена именно этим методом.) Разумеется, этот факт не является случайным и говорит о том, что трансфер-матрица 6-вершинной модели коммутирует с гамильтонианом XXZ-цепочки, и метод Бете дает их общие собственные векторы.

В общей 16-вершинной модели вектор $|\Omega\rangle$ уже не является собственным, а действие трансфер-матрицы не сохраняет число перевернутых стрелок. Так же обстоит дело и в случае 8-вершинной модели, в которой разрешенными являются только вершины с четным числом входящих стрелок. Оказывается, 8-вершинная модель, как и 6-вершинная, является точно решаемой, но координатный анзац Бете к ней неприменим. Ее решение было получено другими, алгебраическими методами (развитыми в первую очередь в работах Р.Бакстера и Ленинградской школы), с которыми мы познакомимся на более простом примере 6-вершинной модели.

2.2.2 Коммутирующие трансфер-матрицы и уравнение Янга-Бакстера

Ключом к алгебраическому решению 6-вершинной модели является нахождение коммутативного семейства трансфер-матриц. Именно, мы покажем, что трансфер-матрицы моделей, для которых

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

имеет одно и то же значение, коммутируют.

Итак, зададимся вопросом, когда трансфер-матрицы

$$\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0} \mathcal{T} = \mathrm{tr}_{V_0} \Big(\mathsf{R}_{01} \mathsf{R}_{02} \dots \mathsf{R}_{0N} \Big), \quad \mathsf{T}' = \mathrm{tr}_{V_0} \mathcal{T}' = \mathrm{tr}_{V_0} \Big(\mathsf{R}'_{01} \mathsf{R}'_{02} \dots \mathsf{R}'_{0N} \Big)$$

коммутируют. Здесь R' – R-матрица с параметрами (a', b', c'). Произведения $\mathsf{T}\mathsf{T}'$ и $\mathsf{T}'\mathsf{T}$ можно записать в виде

$$\mathsf{T}\mathsf{T}' = \mathrm{tr}_{V_0 \otimes V_0} \Big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}' \Big), \qquad \mathsf{T}'\mathsf{T} = \mathrm{tr}_{V_0 \otimes V_0} \Big(\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T} \Big)$$

В правых частях $\mathcal{T}$-матрицы перемножаются тензорно, а их элементы – как операторы в $\mathcal{H}$, с соблюдением порядка. Например:

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix}$$

Для коммутативности трансфер-матриц достаточно, чтобы существовала невырожденная числовая 4×4 матрица M такая, что

$$\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T} = \mathsf{M}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}')\mathsf{M}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathsf{M}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}') = (\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T})\mathsf{M}$$

Тогда следы от $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}$ будут равны в силу цикличности следа.

Пусть P – оператор перестановки сомножителей в тензорном произведении $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$: $\mathsf{P}\, u \otimes v = v \otimes u$. (В главе про модель Гейзенберга этот оператор обозначался как P_{12}.) В базисе $|+\rangle \otimes |+\rangle$, $|+\rangle \otimes |-\rangle$, $|-\rangle \otimes |+\rangle$, $|-\rangle \otimes |-\rangle$ матрица этого оператора имеет вид

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если бы матричные элементы $\mathcal{T}$ коммутировали с матричными элементами $\mathcal{T}'$, мы бы имели $\mathsf{P}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}') = (\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T})\,\mathsf{P}$, т.е. в этом простейшем случае, когда следы заведомо коммутируют, $\mathsf{M} = \mathsf{P}$. В общем случае будем искать матрицу M в виде $\mathsf{M} = \mathsf{P}\mathsf{R}''$, где R'' – некоторая числовая матрица (смысл такого обозначения выясниться чуть ниже).

“Сплетающее” соотношение

$$\mathsf{P}\mathsf{R}''(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}') = (\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T})\mathsf{P}\mathsf{R}'' \tag{2.2}$$

будет для нас основным. Полезно переписать его в несколько иной форме. Обозначим $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \otimes 1$, $\mathcal{T}_2 = 1 \otimes \mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2'$, а $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T} = \mathsf{P}\, \mathcal{T}_2' \mathcal{T}_1\, \mathsf{P}$. После этого, помножив обе части нашего соотношения слева на P, запишем его так:

$$\mathsf{R}''_{12} \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2' = \mathcal{T}_2' \mathcal{T}_1 \mathsf{R}''_{12}$$

Индексы у R'' напоминают, что этот оператор действует в тензорном произведении первого и второго пространств.

Конструктивно матрицу R'' можно найти, наложив более сильное достаточное условие – чтобы такая матрица существовала для каждого R-матричного сомножителя, входящего в $\mathcal{T}$-матрицу, а именно,

$$\mathsf{P}\mathsf{R}''(\mathsf{R} \otimes \mathsf{R}') = (\mathsf{R}' \otimes \mathsf{R})\mathsf{P}\mathsf{R}'' \qquad \text{или} \qquad \mathsf{R}''_{12}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}'_{23} = \mathsf{R}'_{23}\mathsf{R}_{13}\mathsf{R}''_{12}$$

В этом уравнении обе части – числовые матрицы 8×8, и есть надежда, что его удастся разрешить. В индексной записи

$$\sum_{\mu\nu\lambda} R''^{\,\nu\mu}_{\beta\gamma} R'^{\,\lambda\beta'}_{\alpha\mu} R^{\alpha'\gamma'}_{\lambda\nu} = \sum_{\mu\nu\lambda} R^{\lambda\mu}_{\alpha\beta} R'^{\,\alpha'\nu}_{\lambda\gamma} R''^{\,\gamma'\beta'}_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

(где использовано обозначение $R^{\alpha'}_{\alpha}(\beta, \beta') = R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}$). Кроме того, предположим, что матрицы R, R', R'' имеют одинаковую структуру и различаются только значениями параметров: (a, b, c) для R, (a', b', c') для R', (a'', b'', c'') для R''.

Условие (2.3) называется уравнением (или системой уравнений) Янга-Бакстера или уравнением треугольников. Его можно представить графически (рис. 4). Это система из 64 уравнений с 3 неизвестными (ненулевыми элементами матрицы R''). Наша задача – выяснить, при каком выборе матриц R, R' система имеет ненулевое решение.

Заметим, во-первых, что в силу свойства $R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = 0$ при $\alpha + \beta \neq \alpha' + \beta'$ большое число уравнений обращаются в тождества $0 = 0$. Что-то ненулевое в обеих частях получается только при $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$. В результате остается только 20 нетривиальных уравнений, которые сводятся к 10 с учетом симметрии относительно преобразования $|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. Четыре из этих десяти уравнений удовлетворяются тождественно, а остальные образуют три пары эквивалентных уравнений. Таким образом, остаются только 3 нетривиальных уравнения. Они имеют вид

$$\begin{cases} bc'a'' = cb'c'' + ac'b'' \\ ca'a'' = cb'b'' + ac'c'' \\ ba'c'' = cc'b'' + ab'c'' \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим их как систему однородных уравнений с неизвестными a'', b'', c''. Ненулевое решение существует, если определитель системы равен 0. Прямое вычисление показывает, что это требование эквивалентно условию

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'}$$

Аналогично, рассмотрев эти уравнения как систему однородных уравнений с неизвестными a', b', c', получим

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a''^2 + b''^2 - c''^2}{2a''b''}$$

Тем самым мы показали, что если величина

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

одинакова для всех R-матриц R, R', R'', построенные по ним трансфер-матрицы коммутируют.

Для дальнейшего исключительно удобно ввести следующую параметризацию статвесов a, b, c:

$$\begin{cases} a = \rho \sinh(u + \eta) \\ b = \rho \sinh u \\ c = \rho \sinh \eta \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда $\Delta = \cosh \eta$, и трансфер-матрицы коммутируют при различных значениях u, ρ (и одинаковом η). Коммутативность при различных ρ тривиальна, поскольку общий множитель просто выносится и ни на что не влияет. Удобно положить $\rho = 1$. Параметр u называется *спектральным параметром*, и R-матрица, а также все остальные введенные объекты обычно рассматриваются как функции параметра u: $\mathsf{R} = \mathsf{R}(u)$, $\mathsf{T} = \mathsf{T}(u)$ и т.д. При этом подразумевается, что u может меняться, а η фиксировано, тогда $[\mathsf{T}(u), \mathsf{T}(u')] = 0$.

Как связаны между собой спектральные параметры R-матриц, входящих в уравнение Янга-Бакстера? Подставив параметризацию (2.5) для каждой R-матрицы (с u, u', u'' и одинаковым η) в условия (2.4), получим

$$u = u' + u''$$

Уравнение Янга-Бакстера примет симметричный вид

$$\mathsf{R}_{12}(u_1-u_2)\mathsf{R}_{13}(u_1-u_3)\mathsf{R}_{23}(u_2-u_3)=\mathsf{R}_{23}(u_2-u_3)\mathsf{R}_{13}(u_1-u_3)\mathsf{R}_{12}(u_1-u_2)$$

(для данной параметризации оно является тождеством), а сплетаюшее соотношение (2.2)

$$\boxed{\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u'))=(\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u')} \tag{2.6}$$

с матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u)=\mathsf{P}\mathsf{R}(u)=\begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix}$$

Для удобства укажем явный вид R-матрицы в параметризации (2.5) с $\rho=1$:

$$\begin{aligned} \mathsf{R}(u) &= \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh u & \sinh\eta & 0 \\ 0 & \sinh\eta & \sinh u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u+\eta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sinh\left(u+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}\,\sigma_z\right) & \sinh\eta\,\sigma_- \\ & \\ \sinh\eta\,\sigma_+ & \sinh\left(u+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta}{2}\,\sigma_z\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отметим, что $\mathsf{R}(0)=\sinh\eta\ \mathsf{P}$ или, в индексной записи,

$$R_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(0)=R_{\alpha}^{\alpha'}(0|\beta,\beta')=\sinh\eta\,\delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta} \tag{2.8}$$

2.2.3 Связь 6-вершинной модели с XXZ-цепочкой

Пользуясь (2.8), найдем, что оператор $T(0)$ пропорционален оператору циклической перестановки узлов решетки:

$$\boxed{\mathsf{T}(0)=(\sinh\eta)^N e^{-iP}} \tag{2.9}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} T_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}}(0) &= (\sinh\eta)^N\sum_{\{\beta\}}\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_1'\beta_1}\,\delta_{\alpha_2\beta_3}\delta_{\alpha_2'\beta_2}\,\ldots\,\delta_{\alpha_N\beta_1}\delta_{\alpha_N'\beta_N} \\ &= (\sinh\eta)^N\delta_{\alpha_1'\alpha_N}\delta_{\alpha_2'\alpha_1}\ldots\delta_{\alpha_N'\alpha_{N-1}} \\ &= (\sinh\eta)^N\left(e^{-iP}\right)_{\{\alpha\}}^{\{\alpha'\}} \end{aligned}$$

Связь с XXZ-моделью основана на том замечательном факте, что гамильтониан последней содержится в семействе трансфер-матриц 6-вершинной модели $\mathsf{T}(u)$, а именно, $H^{\text{xxz}} \propto \mathsf{T}^{-1}(0)\partial_u \mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} + \text{const}$. Точная формула такова:

$$\boxed{H^{\text{xxz}} = -\sinh\eta\,\frac{d}{du}\log\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} + \ N\cosh\eta} \tag{2.10}$$

Доказательство состоит в прямом вычислении, аналогичном таковому для $T(0)$. В силу важности сделанного утверждения уместно привести некоторые подробности. Имеем по определению:

$$\frac{d}{du}T^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}}(u)\Big|_{u=0} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\{\beta\}} R^{\alpha'_1\beta_2}_{\alpha_1\beta_1}(0)\ldots R^{\alpha'_{j-1}\beta_j}_{\alpha_{j-1}\beta_{j-1}}(0)\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\beta_{j+1}}_{\alpha_j\beta_j}(u)\Big|_{u=0}R^{\alpha'_{j+1}\beta_{j+2}}_{\alpha_{j+1}\beta_{j+1}}(0)\ldots R^{\alpha'_N\beta_1}_{\alpha_N\beta_N}(0)$$

Под знаками суммы все сомножители кроме j-го являются операторами перестановки типа (2.8), а

$$\mathsf{R}'(0) = \frac{d\mathsf{R}(u)}{du}\Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} = \frac{\cosh\eta+1}{2}\,1\otimes 1 + \frac{\cosh\eta-1}{2}\,\sigma_z\otimes\sigma_z$$

$$= \ 1\otimes 1 + \frac{\cosh\eta-1}{2}\Big(1\otimes 1 + \sigma_z\otimes\sigma_z\Big)$$

В индексной записи

$$\frac{d}{du}R^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}(u)\Big|_{u=0} = \frac{\Delta+1}{2}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} \ + \ \frac{\Delta-1}{2}\,(\sigma_z)_{\alpha\alpha'}(\sigma_z)_{\beta\beta'}\,, \qquad \Delta = \cosh\eta$$

Теперь все готово для того, чтобы завершить вычисление:

$$\sinh\eta\left(\mathsf{T}^{-1}(0)\frac{d}{du}\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0}\right)^{\{\alpha'\}}_{\{\alpha\}} = \sum_{j=1}^{N}\delta_{\alpha_1\alpha'_1}\ldots\delta_{\alpha_{j-1}\alpha'_{j-1}}\cdot\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_{j+1}\alpha_j}(u)\Big|_{u=0}\cdot\delta_{\alpha_{j+2}\alpha'_{j+2}}\ldots\delta_{\alpha_N\alpha'_N}$$

Осталось преобразовать

$$\frac{d}{du}R^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_{j+1}\alpha_j}(u)\Big|_{u=0} = (\mathsf{P}\mathsf{R}'(0))^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_j\alpha_{j+1}} = \left(\mathsf{P} + \frac{\Delta-1}{2}\,\mathsf{P}(1+\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)})\right)^{\alpha'_j\alpha'_{j+1}}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}$$

и с учетом того, что $\mathsf{P}(1+\sigma_z\otimes\sigma_z) = 1+\sigma_z\otimes\sigma_z$, получить

$$\sinh\eta\,\mathsf{T}^{-1}(0)\frac{d}{du}\mathsf{T}(u)\Big|_{u=0} = \sum_{j=1}^{N}\left(P_{j,j+1} + \frac{\Delta-1}{2}(1+\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)})\right)$$

что эквивалентно (2.10).

3 Алгебраический анзац Бете

3.1 Алгебраический анзац Бете в 6-вершинной модели

Сплетающее соотношение (2.6)

$$\check{\mathsf{R}}(u-u')(\mathcal{T}(u)\otimes\mathcal{T}(u')) = (\mathcal{T}(u')\otimes\mathcal{T}(u))\check{\mathsf{R}}(u-u') \tag{3.1}$$

играет основную роль в теории интегрируемых моделей статистической физики на двумерной решетке, а также интегрируемых моделей физики твердого тела и теории поля. С алгебраической точки зрения оно задает коммутационные соотношения между генераторами бесконечномерной алгебры (квантовой аффинной алгебры), порождаемой коэффициентами разложения матричных элементов матрицы $\mathcal{T}(u)$ по u. Уравнение Янга-Бакстера эквивалентно ассоциативности этой алгебры, а реализация сплетающего соотношения для 6-вершинной модели матрицами больцмановских весов означает выбор ее специального конечномерного представления. Процедура построения собственных векторов трансфер-матрицы с помощью алгебраических свойств введенных операторов называется алгебраическим анзацем Бете. Далее в этом разделе мы проследим основные моменты этой конструкции в случае, когда R-матрица имеет вид

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

с $a = \sinh(u+\eta)$, $b = \sinh u$, $c = \sinh\eta$.

Матричные элементы квантовой матрицы монодромии

$$\mathcal{T}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}$$

представляют собой некоторые операторы в пространстве $\mathcal{H}\cong(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Поэлементное выписывание соотношений, содержащихся в (3.1), дает правила коммутации этих операторов. Ниже мы приведем только те соотношения, которые понадобятся для вычислений.

Во-первых, одноименные элементы коммутируют при различных значениях спектрального параметра: $[A(u), A(v)] = 0$, $[B(u), B(v)] = 0$, и т.д. Во-вторых, имеют место коммутационные соотношения

$$a(u-v)B(u)A(v) = cB(v)A(u) + b(u-v)A(v)B(u) \tag{3.3}$$

$$a(u-v)B(v)D(u) = cB(u)D(v) + b(u-v)D(u)B(v) \tag{3.4}$$

Задача. Выписать все соотношения на операторы $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, $D(u)$, содержащиеся в (3.1).

Рассмотрим опять вектор $|\Omega\rangle = |+++\ldots+\rangle$. Нетрудно увидеть, что он является собственным для операторов $A(u)$ и $D(u)$, а $C(u)$ уничтожает его:

$$A(u)\,|\Omega\rangle = a^N(u)\,|\Omega\rangle\,,\quad D(u)\,|\Omega\rangle = b^N(u)\,|\Omega\rangle\,,\quad C(u)\,|\Omega\rangle = 0$$

Вектор $|\Omega\rangle$ будем называть порождающим, поскольку все остальные собственные вектора трансфер-матрицы будут строиться многократным применением к нему операторов $B(u)$.

Теорема. *Векторы*

$$|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

являются собственными векторами трансфер-матрицы ($\mathsf{T}(u)\,|\Phi\rangle = T(u)\,|\Phi\rangle$) при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\frac{a^N(u_j)}{b^N(u_j)} = (-1)^{n-1} \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{a(u_j-u_k)}{a(u_k-u_j)} \tag{3.5}$$

или

$$\left(\frac{\sinh(u_j+\eta)}{\sinh u_j}\right)^N = \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{\sinh(u_j-u_k+\eta)}{\sinh(u_j-u_k-\eta)}$$

причем собственное значение $T(u)=T(u;u_1,\ldots,u_n)$ дается формулой

$$T(u;u_1,\ldots,u_n) = a^N(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{a(u_j-u)}{b(u_j-u)} + b^N(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{a(u-u_j)}{b(u-u_j)}$$

или

$$T(u;u_1,\ldots,u_n) = \sinh^N(u+\eta)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j-\eta)}{\sinh(u-u_j)} + \sinh^N u\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j+\eta)}{\sinh(u-u_j)}$$

Доказательство. Перепишем нужные нам коммутационные соотношения (3.3), (3.4) в более удобном виде:

$$A(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{b(v-u)}\,B(v)A(u) - \frac{c}{b(v-u)}\,B(u)A(v)$$

$$D(u)B(v) = \frac{a(u-v)}{b(u-v)}\,B(v)D(u) - \frac{c}{b(u-v)}\,B(u)D(v)$$

С помощью этих соотношений можно преобразовать выражение

$$(A(u)+D(u))\prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

пронося $A(u)$ и $D(u)$ через $B(u_j)$ направо до встречи с вектором $|\Omega\rangle$, который является для них собственным. При этом возникают 2^n слагаемых, которые собираются в выражения вида

$$T(u)\prod_{k=1}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle$$

и

$$\Lambda_j(u)\,B(u)\prod_{k=1,\neq j}^{n} B(u_k)\ |\Omega\rangle$$

с некоторыми числовыми множителями $T(u)$ и $\Lambda_j(u)$. Первое из этих выражений получается, если при коммутации учитывать только первые слагаемые в правых частях коммутационных соотношений. Действительно, если на каком-то шаге воспользоваться вторым слагаемым, возникнет оператор $B(u)$, который потом исчезнуть уже не может. Таким образом, $T(u)$ дается выражением для собственного значения, приведенным выше. Однако, пока мы еще не можем сказать, что наш вектор собственный, поскольку имеются "плохие члены". Коэффициент $\Lambda_j(u)$ можно найти, пронеся сначала $A(u)+D(u)$ через $B(u_j)$ и пользуясь при этом вторыми слагаемыми, а потом, при дальнейшем проносе направо, пользоваться опять только первыми слагаемыми. В результате получается:

$$\Lambda_j(u) = -\frac{c}{b(u_j-u)}\left(a^N(u_j)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{a(u_k-u_j)}{b(u_k-u_j)} - b^N(u_j)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{a(u_j-u_k)}{b(u_j-u_k)}\right)$$

Для того чтобы все плохие члены исчезли, достаточно потребовать $\Lambda_j(u)=0$ при всех $j=1,\dots,n$, что эквивалентно системе уравнений Бете.

3.2 Модели общего вида с тригонометрической R-матрицей

Польза рассмотренного в предыдущем разделе алгебраического метода не ограничивается только элегантным решением 6-вершинной модели. Что, возможно, даже более важно, алгебраический анзац Бете позволяет существенно расширить запас интегрируемых моделей.

3.2.1 Неоднородные модели

Начнем с того, что перепишем R-матрицу (2.7) на j-м узле в виде

$$\mathsf{L}_j(u) = \begin{pmatrix} \sinh\Big(u+\frac{\eta}{2}\,\sigma_z^{(j)}\Big) & \sinh\eta\sigma_-^{(j)} \\ \\ \sinh\eta\sigma_+^{(j)} & \sinh\Big(u-\frac{\eta}{2}\,\sigma_z^{(j)}\Big) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

и назовем *квантовым L-оператором* (терминология восходит к методу обратной задачи рассеяния). Очевидно, $\mathsf{L}_j(u)=\mathsf{R}_{j0}(u-\frac{\eta}{2})$, а также $\mathcal{T}(u)=\mathsf{L}_1(u)\mathsf{L}_2(u)\dots\mathsf{L}_N(u)$, где мы переопределили $\mathcal{T}(u)$ сдвигом аргумента на $\frac{\eta}{2}$. Квантовый L-оператор можно рассматривать как "элементарную" квантовую матрицу монодромии (для модели на одном узле). Ясно поэтому, что L-оператор удовлетворяет основному сплетающему соотношению

$$\check{\mathsf{R}}(u-v)(\mathsf{L}(u)\otimes\mathsf{L}(v)) = (\mathsf{L}(v)\otimes\mathsf{L}(u))\check{\mathsf{R}}(u-v) \tag{3.7}$$

с R-матрицей

$$\check{\mathsf{R}}(u) = \begin{pmatrix} \sinh(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\eta & \sinh u & 0 \\ 0 & \sinh u & \sinh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u+\eta) \end{pmatrix}$$

Действие элементов L-оператора на вектор $|+\rangle$ таково:

$$\mathsf{L}(u)\,|+\rangle = \begin{pmatrix} \sinh\Big(u+\frac{\eta}{2}\Big) & \star \\ 0 & \sinh\Big(u-\frac{\eta}{2}\Big) \end{pmatrix} |+\rangle \tag{3.8}$$

Звездочкой обозначен несущественный для нас ненулевой элемент.

Обобщение, позволяющее породить широкий класс моделей, которые решаются тем же методом, основано на замечании, что сплетающее соотношение (3.1) для квантовых матриц монодромии останется в силе, если спектральный параметр в каждом L-операторе в произведении по цепочке сдвигать на произвольные зависящие от номера узла величины:

$$\mathcal{T}(u) = \mathsf{L}_1(u - \xi_1)\, \mathsf{L}_2(u - \xi_2) \, \ldots \, \mathsf{L}_N(u - \xi_N) \tag{3.9}$$

(Разумеется, сплетающее соотношение (3.1) для $\mathcal{T}(u)$, $\mathcal{T}(v)$ и вытекающая из него коммутативность их следов имеет место, если только параметры ξ_i одинаковы в обеих матрицах.) Такая $\mathcal{T}$-матрица называется матрицей монодромии неоднородной цепочки, а величины ξ_i – неоднородностями в узлах. Наряду с η они являются параметрами, задающими модель. Тем самым мы построили бесконечно-параметрическое семейство моделей, трансфер-матрицы которых поддаются диагонализации с помощью того же алгебраического анзаца Бете. В математическом отношении неоднородные модели ничем не хуже (а, возможно, даже лучше) однородной 6-вершинной модели или XXZ-цепочки. С физической точки зрения, однако, их недостатком является то, что как правило не удается найти локальный гамильтониан, который можно было бы включить в построенное коммутирующее семейство. Поэтому вместо “мы построили модель”, физик в этом месте сказал бы лишь “мы построили однопараметрическое семейство коммутирующих операторов”.

Важным условием применимости алгебраического анзаца Бете было существование вакуумного вектора $|\Omega\rangle$ – такого, что $C(u)\,|\Omega\rangle = 0$ и собственного для $A(u), D(u)$, т.е. такого, что

$$\mathcal{T}(u)\,|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} |\Omega\rangle = \begin{pmatrix} a(u) & \star \\ 0 & d(u) \end{pmatrix} |\Omega\rangle$$

с некоторыми функциями $a(u)$, $d(u)$ (функция $a(u)$ этом разделе отличается от той, что обозначалась через $a(u)$ в разделе про 6-вершинную модель!). Свойство (3.8) означает, что в нашей обобщенной модели в качестве вакуумного вектора можно взять $|\Omega\rangle = |+ + + \ldots +\rangle$, тогда

$$a(u) = \prod_{j=1}^{N} \sinh\Big(u - \xi_j + \frac{\eta}{2}\Big)\,, \qquad d(u) = \prod_{j=1}^{N} \sinh\Big(u - \xi_j - \frac{\eta}{2}\Big)$$

Функции такого вида будем называть *тригонометрическими полиномами* (степени N).

Можно пойти еще дальше и взять функцию $r(u) = a(u)/d(u)$ с условием периодичности $r(u + 2\pi i) = r(u)$ в качестве *функционального* параметра модели. (Будем называть ее обобщенной XXZ моделью.) Действительно, устремляя $N \to \infty$ и выбирая должным образом ξ_i, можно формально получить любую разумную функцию.

Для обобщенной модели с вакуумным вектором существует общая алгебраическая процедура диагонализации коммутативного семейства операторов $\mathrm{tr}\,\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$.

Теорема. *Векторы*

$$|\Phi(u_1,\dots,u_n)\rangle = \prod_{j=1}^{n} B(u_j)\ |\Omega\rangle$$

являются собственными векторами трансфер-матрицы ($\mathsf{T}(u)\,|\Phi\rangle = T(u)\,|\Phi\rangle$) при условии, что числа u_j удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\frac{a(u_j)}{d(u_j)} = \prod_{k=1,\neq j}^{n} \frac{\sinh(u_j-u_k+\eta)}{\sinh(u_j-u_k-\eta)} \tag{3.10}$$

причем собственное значение $T(u) = T(u;u_1,\dots,u_n)$ дается формулой

$$T(u;u_1,\dots,u_n) = a(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j-\eta)}{\sinh(u-u_j)} + d(u)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sinh(u-u_j+\eta)}{\sinh(u-u_j)} \tag{3.11}$$

Доказательство полностью аналогично таковому для 6-вершинной модели.

3.2.2 Q-оператор Бакстера и TQ-соотношение.

Обратим внимание на то, что система уравнений Бете в точности эквивалентна тому, что собственное значение трансфер-матрицы $T(u) = T(u;u_1,\dots,u_n)$ (3.11) не имеет полюсов в точках $u = u_i$. На этом замечании основан альтернативный метод получения уравнений Бете. Именно, из того, что трансфер-матрицы коммутируют при всех u следует, что они могут быть приведены к диагональному виду преобразованием, не зависящим от u, а тогда, поскольку все их матричные элементы – тригонометрические полиномы степени N, таковыми должны быть и все их собственные значения. Поэтому надо потребовать, чтобы правая часть (3.11) была регулярной функцией в конечной части комплексной плоскости. Требование равенства нулю вычетов в точках u_i и даст систему уравнений Бете (3.10).

Обозначим

$$Q(u) = \prod_{j=1}^{n}\sinh(u-u_j)$$

тогда соотношение (3.11) можно записать в виде

$$T(u)Q(u) = a(u)Q(u-\eta) + d(u)Q(u+\eta) \tag{3.12}$$

а уравнения Бете в виде

$$\frac{a(u_j)}{d(u_j)} = -\frac{Q(u_j+\eta)}{Q(u_j-\eta)}$$

Оказывается, можно построить *оператор* $\mathsf{Q}(u)$ такой, что а) он коммутирует со всеми трансфер-матрицами, т.е. $[\mathsf{T}(u),\mathsf{Q}(v)] = 0$ при всех u, v и б) его собственные значения на бетевских векторах $|\Phi(u_1,\dots,u_n)\rangle$ равны $Q(u)$. Соотношение (3.12) запишется тогда в операторном виде:

$$\mathsf{T}(u)\mathsf{Q}(u) = a(u)\mathsf{Q}(u-\eta) + d(u)\mathsf{Q}(u+\eta)$$

Оно называется TQ-соотношением, а $\mathsf{Q}(u)$ – Q-оператором Бакстера.

3.2.3 Предел в XXX-модель.

Положим $\lambda = \eta u$ и совершим предельный переход $\eta \to 0$. Тригонометрическая R-матрица при этом перейдет в рациональную

$$\mathsf{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \lambda \mathsf{I} + \mathsf{P} \tag{3.13}$$

Отметим, что она $GL(2)$-инвариантна в следующем смысле:

$$g \otimes g \, \mathsf{R}(\lambda) = \mathsf{R}(\lambda) \, g \otimes g$$

для любой матрицы $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$. L-оператор примет вид

$$\mathsf{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2}\sigma_z & \sigma_- \\ \sigma_+ & \lambda - \frac{1}{2}\sigma_z \end{pmatrix}$$

Производящая функция интегралов движения XXX-модели строится как $\mathsf{T}(\lambda) = \mathrm{tr}\Big(\mathsf{L}_1(\lambda) \ldots \mathsf{L}_N(\lambda)\Big)$. Как и в XXZ-случае модель допускает интегрируемое неоднородное обобщение.

Более общий L-оператор, который сплетается рациональной R-матрицей (т.е. удовлетворяет $RLL = LLR$-соотношению) можно искать в виде

$$\mathsf{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2}\mathsf{S} & \mathsf{S}_- \\ \mathsf{S}_+ & \lambda - \frac{1}{2}\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathsf{S}, \mathsf{S}_\pm$ – некоторые неизвестные пока операторы. Подстановка в $RLL = LLR$ приводит к следующим соотношениям:

$$[\mathsf{S}, \mathsf{S}_\pm] = \pm 2\mathsf{S}_\pm, \qquad [\mathsf{S}_+, \mathsf{S}_-] = \mathsf{S}$$

которые представляют собой соотношения алгебры sl_2 (можно считать ее вложенной в универсальную обертывающую алгебру $U(sl_2)$). Этот L-оператор действует в тензорном произведении $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – пространство какого-либо представления этой алгебры.

Представления алгебры $U(sl_2)$ можно реализовать дифференциальными операторами в пространстве функций от переменной z:

$$\mathsf{S}_- = \partial_z, \qquad \mathsf{S} = z\partial_z - \ell, \qquad \mathsf{S}_+ = -z^2\partial_z + 2\ell z \tag{3.14}$$

В общем случае это представление неприводимо и бесконечномерно. Если $2\ell+1 \in \mathbb{Z}_+$, оно становится приводимым, и из него выделяется $(2\ell+1)$-мерное неприводимое представление спина ℓ (целого или полуцелого). В частности, при $\ell = \frac{1}{2}$ имеем представление $\mathsf{S} = \sigma_z$, $\mathsf{S}_\pm = \sigma_\pm$.

3.3 XXZ-модель и q-деформация алгебры sl_2.

По аналогии с рациональным случаем более общий L-оператор, который сплетается тригонометрической R-матрицей, можно искать в виде

$$\mathsf{L}(u) = \begin{pmatrix} \sinh\Big(u + \frac{\eta}{2}\,\mathsf{S}\Big) & \sinh\eta\,\mathsf{S}_- \\ \\ \sinh\eta\,\mathsf{S}_+ & \sinh\Big(u - \frac{\eta}{2}\,\mathsf{S}\Big) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Подстановка в $RLL = LLR$ приводит к следующим соотношениям:

$$[\mathsf{S},\,\mathsf{S}_\pm] = \pm 2\mathsf{S}_\pm, \qquad [\mathsf{S}_+,\,\mathsf{S}_-] = \frac{\sinh(\eta\mathsf{S})}{\sinh\eta}$$

Эти соотношения задают q-деформацию $U_q(sl_2)$ алгебры $U(sl_2)$. Положим $q = e^\eta$ и введем генераторы

$$\mathsf{A} = q^{\mathsf{S}/2}, \quad \mathsf{D} = q^{-\mathsf{S}/2}, \quad \mathsf{B} = \mathsf{S}_+, \quad \mathsf{C} = \mathsf{S}_-$$

тогда соотношения запишутся в виде

$$\mathsf{AB} = q\mathsf{BA}, \quad \mathsf{BD} = q\mathsf{DB}, \quad \mathsf{DC} = q\mathsf{CD}, \quad \mathsf{CA} = q\mathsf{AC}, \quad [\mathsf{B},\,\mathsf{C}] = \frac{\mathsf{A}^2 - \mathsf{D}^2}{q - q^{-1}}$$

Элемент Казимира:

$$\Omega = \frac{q^{-1}\mathsf{A}^2 + q\mathsf{D}^2 - 2}{(q - q^{-1})^2} + \mathsf{BC} = \frac{\sinh^2 \frac{\eta}{2}(\mathsf{S} - 1)}{\sinh^2 \eta} + \mathsf{S}_+\mathsf{S}_- \tag{3.16}$$

При q в общем положении (не равном корню из 1) представления алгебры $U_q(sl_2)$ являются гладкими деформациями представлений алгебры $U(sl_2)$. Их можно реализовать разностными операторами в пространстве функций от переменной z. Введем операторы сдвига $T_\pm f(z) = f(q^\pm z)$. Тогда

$$\begin{gathered} \mathsf{A} = q^{-\ell}T_+, \qquad \mathsf{D} = q^{\ell}T_- \\ \mathsf{B} = \frac{z}{q^{-1} - q}\Big(q^{-2\ell}T_+ - q^{2\ell}T_-\Big) \\ \mathsf{C} = \frac{z^{-1}}{q^{-1} - q}\Big(T_- - T_+\Big) \end{gathered} \tag{3.17}$$

При $\ell = \frac{1}{2}$ имеем двумерное неприводимое представление $\mathsf{S} = \sigma_z$, $\mathsf{S}_\pm = \sigma_\pm$.

3.4 Эллиптическая R-матрица и алгебра Склянина

Самое общее решение уравнения Янга-Бакстера выражается в эллиптических функциях (или θ-функциях Якоби). Соответствующие R-матрицы параметризуют больцмановские веса 8-вершинной модели, а построенная из них трансфер-матрица содержит гамильтониан XYZ цепочки.

В этом разделе нам удобно будет обозначить матрицы Паули σ_x, σ_y, σ_z как σ_1, σ_2, σ_3 (напомним, что $\sigma_0 = 1$).

Эллиптическая R-матрица имеет вид

$$\mathsf{R}(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u+\eta)\sigma_a \otimes \sigma_a\,, \qquad W_a(u) = \frac{\theta_{a+1}(u|\tau)}{\theta_{a+1}(\eta|\tau)} \tag{3.18}$$

где $\theta_a(u|\tau)$ – тета-функции Якоби (индекс a понимается по модулю 4). Эллиптический L-оператор, сплетаемый этой R-матрицей, будем искать в виде

$$\mathsf{L}(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u)\,\sigma_a \otimes \mathsf{S}_a = \begin{pmatrix} W_0(u)\mathsf{S}_0 + W_3(u)\mathsf{S}_3 & W_1(u)\mathsf{S}_1 - iW_2(u)\mathsf{S}_2 \\ \\ W_1(u)\mathsf{S}_1 + iW_2(u)\mathsf{S}_2 & W_0(u)\mathsf{S}_0 - W_3(u)\mathsf{S}_3 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

где $\mathsf{S}_0, \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \mathsf{S}_3$ – неизвестные пока операторы. Подстановка в $RLL = LLR$ приводит к следующим шести квадратичным соотношениям для них:

$$[\mathsf{S}_0,\, \mathsf{S}_\alpha]_- = iJ_{\beta\gamma}[\mathsf{S}_\beta,\, \mathsf{S}_\gamma]_+, \qquad [\mathsf{S}_\alpha,\, \mathsf{S}_\beta]_- = i[\mathsf{S}_0,\, \mathsf{S}_\gamma]_+ \tag{3.20}$$

Здесь и далее $[\ ,\ ]_\mp$ – соответственно коммутатор и антикоммутатор, а $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ означает любую циклическую перестановку индексов $\{1, 2, 3\}$. Алгебра, порождаемая образующими и соотношениями (3.20) называется алгеброй Склянина. Структурные константы имеют вид

$$J_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha-\beta-1}\left(\frac{\theta_1(\eta|\tau)\,\theta_{\gamma+1}(\eta|\tau)}{\theta_{\alpha+1}(\eta|\tau)\theta_{\beta+1}(\eta|\tau)}\right)^2$$

или

$$J_{\alpha\beta} = \frac{J_\beta - J_\alpha}{J_\gamma}, \qquad J_\alpha = \frac{\theta_{\alpha+1}(0)\theta_{\alpha+1}(2\eta)}{\theta^2_{\alpha+1}(\eta)}$$

В алгебре Склянина есть 2 независимых центральных элемента (элементы Казимира):

$$\Omega_1 = \mathsf{S}_0^2 + \mathsf{S}_1^2 + \mathsf{S}_2^2 + \mathsf{S}_3^2, \qquad \Omega_2 = J_1\mathsf{S}_1^2 + J_2\mathsf{S}_2^2 + J_3\mathsf{S}_3^2$$

Переопределим генераторы с помощью соотношений

$$\mathsf{S}_a = i^{\delta_{a,2}}\theta_{a+1}(\eta|\tau)\mathcal{S}_a$$

тогда можно записать соотношения алгебры Склянина в виде

$$(-1)^{\alpha+1}I_{\alpha 0}\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_0 = I_{\beta\gamma}\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma - I_{\gamma\beta}\mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_\beta$$

$$(-1)^{\alpha+1}I_{\alpha 0}\mathcal{S}_0\mathcal{S}_\alpha = I_{\gamma\beta}\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma - I_{\beta\gamma}\mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_\beta$$

где $I_{ab} = \theta_{a+1}(0|\tau)\theta_{b+1}(2\eta|\tau)$.

Если $\eta \neq r_1 + r_2\tau$ с рациональными r_1, r_2, представления алгебры Склянина являются гладкими деформациями представлений алгебры $U(gl_2)$. Их можно реализовать разностными операторами в пространстве функций от переменной z:

$$\mathcal{S}_a = \frac{\theta_{a+1}(2z - 2\ell\eta|\tau)}{\theta_1(2z|\tau)}\, e^{\eta\partial_z} - \frac{\theta_{a+1}(-2z - 2\ell\eta|\tau)}{\theta_1(2z|\tau)}\, e^{-\eta\partial_z} \tag{3.21}$$

Параметр ℓ является аналогом спина представления. Если $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$, эти операторы имеют конечномерное инвариантное подпространство $\Theta_{4\ell}^+$ четных тета-функций порядка 4ℓ, т.е. пространство целых функций $F(z)$ таких, что $F(-z) = F(z)$ и

$$F(z+1) = F(z), \qquad F(z+\tau) = e^{-4\ell\pi i\tau - 8\ell\pi i z} F(z)$$

Это подпространство имеет размерность $2\ell + 1$. В нем реализуется неприводимое представление алгебры Склянина. Центральные элементы имеют на нем следующие значения:

$$\Omega_1 = 4\theta_1^2((2\ell+1)\eta|\tau), \qquad \Omega_2 = 4\theta_1(2\ell\eta|\tau)\,\theta_1(2(\ell+1)\eta|\tau)$$

Список литературы

[1] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Москва, “Наука”, 1992.

[2] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Москва, “Мир”, 1987.

[3] Р.Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М., Мир, 1985.

[4] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга*, УМН **34:5** (1979) 13-63.

[5] Л. Тахтаджян, Л. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга*, Записки научных семинаров ЛОМИ, **109** (1981) 134-178.

[6] А.А. Белавин, А.Г. Кулаков, Р.А. Усманов, “Лекции по теоретической физике”, 2-е изд., испр. и доп., М., МЦНМО, 2001

[7] F. Franchini, *Notes on Bethe ansatz techniques*, http://people.sissa.it/ ffranchi/BAnotes.pdf

[8] M. Zvonarev, *Notes on Bethe ansatz*, http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/LectureZvonarev.pdf