Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2015)

47. Частично упорядоченное множество (J, ≤) называется *направленным,* если в нем любое 2-элементное подмножество ограничено сверху. *Диаграммой* над ч.у.м. (J, ≤) называется диаграмма над соответствующей категорией CPO(J, ≤). Постройте в явном виде копредел диаграммы над направленным ч.у.м. ("прямой предел" в традиционном смысле)

а) в категории SET,

б) в категории абелевых групп ABGR.

Говорим, что категория $\mathscr{C}$ - *с конечными произведениями*, если в ней существуют произведения любых двух объектов (а значит, и любые конечные произведения — задача 42) .

48. Докажите, что категория CM(G, · , e), построенная из конечного моноида, - с конечными произведениями, если и только если моноид (G, · , e) тривиален.

50. Приведите пример нетривиального моноида (G, · , e), для которого CM(G, · , e) - с конечными произведениями.

Указание. Можно рассмотреть множество $\{0,1\}^\omega$ счетных двоичных последовательностей с почленным умножением.

51. Если в категории существует $A\times A$, то *диагональный морфизм* для A (обозначение: Δ_A)– это $<1_A,1_A>$: $A \longrightarrow A \times A$. Докажите, что Δ_A – уравнитель пары проекций $p_1,p_2 : A \times A \longrightarrow A$.

52. Докажите, что эквивалентность категорий сохраняет пределы.

53. Докажите, что изоморфизм функторов сохраняет унивалентность и полноту.

54. Докажите, что если функтор $\mathbf{F}$ сохраняет пределы над схемой $\mathscr{J}$ и $\mathbf{G} \cong \mathbf{F}$, то и $\mathbf{G}$ сохраняет пределы над $\mathscr{J}$.

55. (а) Сформулируйте определение морфизма диаграмм (в данной категории с данной схемой) по аналогии с морфизмом функторов.

(б) Докажите, что категории конусов над изоморфными диаграммами изоморфны.

56. (а) См. предыдущую задачу.

(б) Докажите, что если диаграмма имеет предел, то и любая изоморфная ей диаграмма имеет предел, и эти пределы изоморфны.

57. (а) Докажите, что если функторы $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ естественно изоморфны и $\mathbf{H} : \mathscr{D} \rightsquigarrow \mathscr{E}$, то и $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}$ естественно изоморфны.

(б) Докажите, что если функторы $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ естественно изоморфны и $\mathbf{H} : \mathscr{E} \rightsquigarrow \mathscr{C}$, то и $\mathbf{H} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$ естественно изоморфны.

58. Докажите, что если $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ - произвольные функторы, $\mathbf{H} : \mathscr{D} \rightsquigarrow \mathscr{E}$ - полный унивалентный, и $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}$ естественно изоморфны, то и $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ естественно изоморфны.

59. Докажите, что всякая эквивалентность SET$\rightsquigarrow$ SET естественно изоморфна тождественному функтору 1_{SET}.

60. Пусть CM(G) - категория с одним объектом, ассоциированная с группой G. Докажите, что функторы в этой категории, естественно изоморфные тождественному, - это внутренние автоморфизмы группы G (т.е. отображения вида $x \mapsto a^{-1}xa$).

61. Пусть τ: Hom(A,−) $\rightsquigarrow$ Hom(B,−) - естественное преобразование. Докажите, что $\tau_A(1_A) : B \longrightarrow A$ – изоморфизм.

62. Докажите, что тождественный функтор $\mathbf{1}_{SET}$ представим.

63. Докажите, что функтор $\mathcal{Q}$: $SET^o \rightsquigarrow SET$ (задача 9) представим.

64. Докажите, что функтор $\mathcal{P}$: $SET \rightsquigarrow SET$ (задача 8) не представим.

65. *Забывающий функтор (*из алгебраической категории в SET) переводит алгебраические структуры в их носители, а морфизмы - в соответствующие отображения. Докажите, что забывающие функторы
GROUP $\rightsquigarrow$ SET и $VECT_K \rightsquigarrow$ SET представимы
(GROUP - категория групп и гомоморфизмов, $VECT_K$ - категория векторных пространств над полем K и линейных отображений).

66. Докажите, что всякий функтор, естественно изоморфный тождественному, — эквивалентность.

67. Докажите, что если $\mathbf{F}_1 \dashv \mathbf{G}$ и $\mathbf{F}_1 \cong \mathbf{F}_2$, то $\mathbf{F}_2 \dashv \mathbf{G}$.

68. Докажите, что эквивалентность категорий обладает левым и правым сопряженным функторами.

69. Докажите, что функтор, сопряженный к эквивалентности категорий, - также эквивалентность.

70. Докажите, что если функтор имеет левый сопряженный, то он сохраняет пределы.

71. Пусть TOP – категория топологических пространств и непрерывных отображений. Докажите, что для забывающего функтора TOP $\rightsquigarrow$ SET имеются левый и правый сопряженные.

72. Пусть $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ – частично упорядоченные множества; тогда монотонное отображение $f:(A,\leq_A) \longrightarrow (B,\leq_B)$ соответствует функтору

$\mathbf{F}$: $CPO(A,\leq_A) \longrightarrow CPO(B,\leq_B)$ (см. задачу 17).

Пусть $f:(A,\leq_A) \longrightarrow (B,\leq_B)$, $g: (B,\leq_B) \longrightarrow (A,\leq_A)$ – монотонные отображения.

Докажите, что $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$, если и только если (f,g) - *соответствие Галуа*, т.е. для любых a,b

$$f(a) \leq_B b \Leftrightarrow a \leq_A g(b).$$