Алгебра, листок 4 (крайний срок сдачи – 8 декабря)

В этом листке все кольца предполагаются с ассоциативным умножением и единицей. Коммутативность умножения по умолчанию не предполагается.

1. **a)** Докажите в произвольном кольце тождества $a \cdot 0 = 0,\ (-a)\cdot b = -ab,\ (-1)\cdot a = -a$.
b) Докажите для произвольного гомоморфизма колец φ равенства $\varphi(-a) = -\varphi(a), \varphi(0) = 0$.

2. **a)** Докажите, что если элемент x нильпотентен, то $1+x$ обратим. **b)** Докажите, что конечное кольцо без делителей нуля является полем.

3. Опишите все кольца из не более чем пяти элементов.

4. Докажите, что кольцо непрерывных функций на $\mathbb{R}$ не разлагается в прямое произведение, а на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ – разлагается. Есть ли в этих кольцах делители нуля?

5. Пусть $ax + by = 1$ в некотором коммутативном кольце A. Верны ли для произвольного $m \in A$ импликации **a)** $a|mb \Rightarrow a|m$, **b)** $a|m,\ b|m \Rightarrow ab|m$?

6. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени выше 1 иметь **a)** рациональные корни? **b)** кратные комплексные корни?

7. Пусть R – область целостности, и $g \in R[x]$. Покажите, что существует коммутативное кольцо $R' \supset R$, такое что в $R'[x] \supset R[x]$ многочлен g разлагается на множители степени не выше 1.

8. Опишите все идеалы в кольце формальных рядов $\mathbb{K}[[x]]$ для произвольного поля $\mathbb{K}$.

9. Пусть многочлены $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathbb{Q}[x]$ взаимно просты, и $F = f_1 f_2 \ldots f_s$. постройте изоморфизм колец $\mathbb{Q}[x]/(F) \simeq \prod_i \mathbb{Q}[x]/(f_i)$. Покажите, что взаимная простота существенна.

10. Для произвольных идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ в коммутативном кольце A определим сумму, произведение и *радикал* как

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \{a+b \,|\, a\in\mathfrak{a},\ b\in\mathfrak{b}\},$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\textstyle\sum_i a_i b_i \,|\, a_i\in\mathfrak{a},\ b_i\in\mathfrak{b}\},$$
$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a\in A \,|\, \exists n\in\mathbb{N} : a^n\in\mathfrak{a}\}.$$

a) Все ли они являются идеалами? А если определить произведение как $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{ab \,|\, a\in\mathfrak{a},\ b\in\mathfrak{b}\}$? Верно ли, что **b)** $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$? **c)** $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$? **d)** $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{b}}$? **e)** $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ при $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ и $\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$?

Напомним, что идеал $I \subsetneq R$ называется *простым* или, соответственно, *максимальным*, если R/I не имеет делителей нуля или, соответственно, является полем. Элемент a области целостности R называется *простым*, если идеал $(a) \in R$ прост, и *неприводимым*, если не разлагается в произведение необратимых элементов.

11. **a)** Докажите, что собственный идеал максимален, если и только если не содержится ни в каком строго большем собственном идеале (в частности, в поле нет нетривиальных идеалов). **b)** Следует ли простота идеала из его максимальности? **b')** А наоборот? **c)** Следует ли простота элемента области целостности из его неприводимости? **c')** А наоборот? **d)** Те же вопросы в случае кольца главных идеалов.

12. **a)** Докажите, что простой идеал содержит пересечение конечного набора идеалов только тогда, когда содержит хотя бы один из них. **b)** Докажите, что идеал содержится в объединении конечного набора простых идеалов только тогда, когда он содержится в одном из них.

13. Докажите, что пересечение всех простых идеалов коммутативного кольца совпадает с его *нильрадикалом* $\sqrt{0}$.

14.[x] Есть ли среди факторколец кольца $\mathbb{Z}[i]$ поле характеристики **a)** 2, **b)** 3, и если есть, то сколько в нем может быть элементов? **c)** При каком простом p существует ненулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/(p)$?

15. Докажите, что над любым полем существует бесконечно много неприводимых многочленов.