

## Алгебра, семинар 23–27 ноября: кольца

- Какие из следующих колец **a)** евклидовы, **b)** факториальны:  $\mathbb{Z}[x]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{1}]$ ?
- Верно ли, что в любом коммутативном ассоциативном кольце с единицей
  - произведение двух обратимых элементов является обратимым элементом?
  - если произведение двух элементов является обратимым элементом, то оба сомножителя являются обратимыми элементами?
  - если произведение двух элементов является делителем нуля, то оба сомножителя являются делителями нуля?
  - если произведение двух элементов является делителем нуля, то хотя бы один сомножитель является делителем нуля?
  - произведение двух нильпотентных элементов является нильпотентным элементом?
  - если произведение двух элементов является нильпотентным, то хотя бы один сомножитель является нильпотентным?
  - произведение любого элемента на нильпотентный является нильпотентным?
  - произведение двух идемпотентных элементов, является идемпотентным?
  - сумма двух обратимых элементов снова является обратимым?
  - сумма двух делителей нуля снова является делителем нуля?
  - сумма двух нильпотентных элементов снова является нильпотентным?
- Являются ли полями кольца  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ ;  $\mathbb{R}[x]/(x^3 + 1)$ ;  $\mathbb{R}[x]/(x^4 + 1)$ ;  $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + 1)$ ?
- Сколько попарно неизоморфных колец здесь выписано:
  - $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ?
  - $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}[x]/(x)$ ,  $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ ,  $\mathbb{R}[x]/(x - 1)$ ,  $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1)$ ,  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ ?
  - $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x)$ ,  $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 1)$ ,  $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 2)$ ,  $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ ,  $\mathbb{F}_9$ ,  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}[i]/(3)$ ?
  - Сколько делителей нуля, обратимых, нильпотентных и идемпотентных элементов в каждом из колец пункта **c)**?