1 Задачи 4. Теорема Нётер, тождества Уорда, операторные разложения

1. Теория Лиувилля.
   - Найдите аналог конформной симметрии у теории действием $S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi + \mu e^{\phi/a}\right)$. (Подсказка: попробуйте что-то прибавлять в ϕ при преобразовании)
   - Используя теорему Нётер, найдите тензор энергии импульса $T(z)$, отвечающий этому преобразованию.
   - Положите μ=0 и вычислите операторное разложение $T(z)T(w)$: нужно убедиться, что это тензор энергии-импульса и вычислить центральный заряд.
   - При $\mu = 0$ и $a = 0$ вычислите операторное разложение $T(z) :e^{i\alpha\phi(w)}:$. Чему равна размерность экспоненты?
   - Теперь усложните задачу, убрав условие $a = 0$. Найдите поля с размерностью 1.
2. Вырожденные поля.
   - Найдите размерность Δ, при которой в модуле Верма на второй полочке возникает старший вектор $|\chi\rangle = c_1 L_{-1}^2 + c_2 L_{-2}|\Delta\rangle$. В физической теории правильно считать этот вектор равным нулю, т.к. мы интересуемся только неприводимыми представлениями.
   - Перепишите это условие в терминах генераторов алгебры Врасоро, действующих на пространстве полей в виде $\partial^2\Phi_\Delta(z)+\kappa\oint_z dwT(w)\Phi_\Delta(z) = 0$
   - Рассмотрите данное равенство под коррелятором $\langle\Phi_{\Delta_1}(z_1)\Phi_{\Delta_2}(z_2)\Phi_\Delta(z)\rangle$. Что оно даёт нетривиального?
3. Бозонное представление алгебры Вирасоро
   - Пользуясь формулой $L_k = \frac{1}{2}\sum_{m+n=k} :a_m a_n:$, вычислите $[L_n, L_m]$. a_n – бозонные операторы $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m}$
   - Вычислите, чему равен вектор $|\chi\rangle$ в терминах бозонных операторов. Как это можно было угадать сразу?
4. bc-система
   - Рассмотрите теорию с действием $S[b, c] = \int d^2zb\bar{\partial}c + h.c.$. Убедитесь, что она обладает конформной инвариантностью при приписывании любой размерности полю c. Чему при этом равна размерность поля b?
   - Для данного преобразования найдите $T(z)$
   - Вычислите центральный заряд
   - Убедитесь, что эта теория также обладает некоторой $U(1)$ голоморфной симметрией. Найдите ток, отвечающий ей. В каком случае этот ток становится примарным полем (вычислите операторное разложение с $T(z)$)?