1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Теорема Нётер и конформные тождества Уорда

7 Применение тождеств Уорда. Алгебры интегралов движения

8 Представления алгебры Вирасоро

9 Переход к операторному формализму

9.1 Квантовая механика

В формулировке квантовой механики на языке функционального интеграла амплитуда перехода из начального в конечное состояние с фиксированными координатами задаётся выражением

$$K(q_f, q_i|T) = \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^T (\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q))dt\right) \tag{9.1}$$

С помощью этой амплитуды волновая функция в момент времени T записывается как $\psi(q_f, T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(q_f, q_i|T)\psi(q_i, 0)dq_i$

Перепишем его немного в другой форме, предварительно дискретизировав по очевидному правилу: $\int dt \mapsto \Delta t \sum$, $\frac{df}{dt} \mapsto \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta t}$

$$K(q_f, q_i|T) = \int\limits_{q_0=q_i, q_{N+1}=q_f} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N}(\frac{m(q_i-q_{i+1})^2}{2\Delta t} - V(q_i)\Delta t)\right)\frac{dq_1}{A}....\frac{dq_N}{A} \tag{9.2}$$

где константа $A = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}}$ находится, например, из принципа "свёртка амплитуд - тоже амплитуда", т.е.

$$K(q_f, q_i|T) = \int K(q_f, q_N|\Delta t)K(q_N, q_{N-1}|\Delta t)...K(q_1, q_i|\Delta t)dq_1...dq_N \tag{9.3}$$

Заметим теперь, что эта формула представляет собой свёртку ядер интегральных операторов!

Теперь разберёмся с ядром одного оператора, легко проверить, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar m}}\exp\left(\frac{im(q_i - q_{i+1})^2}{2\hbar\Delta t}\right) = \left[e^{\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\frac{d^2}{dq^2}}\right](q_{i+1}, q_i) \tag{9.4}$$

где в правой части введено обозначение для ядра оператора $e^{\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\frac{d^2}{dq^2}}$, вычисленного в паре точек q_{i+1}, q_i.

Теперь, пользуясь малостью Δt, объединяем обе части оператора

$$K(q_{i+1}, q_i|\Delta t) \approx \exp\left(\frac{-i\Delta t}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + V(q)\right)\right)(q_{i+1}, q_i) \tag{9.5}$$

и радостно узнаем в экспоненте гамильтониан частицы в потенциале $V(q)$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + V(q) \tag{9.6}$$

Таким образом мы проделали "обратный вывод" Дирака-Фейнмана и восстановили оператор эволюции $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)\hat{H}\right)$, матричный элемент которого в координатном представлении (9.1) задается континуальным интегралом.

9.2 Гармонический осциллятор

Напомним, что положено делать с этим гамильтонианом в случае гармонического осциллятора (для простоты все константы, в том числе, частота осциллятора, положены единичными):

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}q^2 = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \tag{9.7}$$

где операторы уничтожения $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dq} + q\right)$ и рождения $\hat{a}\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dq} + q\right)$ удовлетворяют соотношению Гейзенберга-Фока $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Пространство состояний нашей системы - гармонического осциллятора - устроено стандартным образом: волновая функция основного состояния $\hat{a}\psi_0(q) = 0$ в координатном представлении $\psi_0(q) = e^{-\frac{q^2}{2}}$, а волновые функции всех остальных состояний $\psi_n(q) \simeq (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(q)$ строятся последовательным действием оператора рождения. Уровни энергии гармонического осциллятора $E_n = n + \frac{1}{2}$, $n \geq 0$. Это важный пример, потому что *все* невзаимодействующие теории поля сводятся к сумме осцилляторов и их фермионных версий.

9.3 Хронологическое упорядочение

Предположим, что нас теперь интересует не амплитуда перехода из одного состояния в другое, а, например, среднее от некоторых операторов, например значений координат $\hat{q}(t)$ в какие-то заданные моменты времени, при бесконечном времени эволюции ($t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$)

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \frac{\langle 0|\hat{K}(\infty - t_1)\hat{q}\hat{K}(t_1 - t_2)\hat{q}\hat{K}(t_2 - (-\infty))|0\rangle}{\langle 0|\hat{K}(\infty - (-\infty))|0\rangle} \tag{9.8}$$

В правой части стоит по-другому записанный функциональный интеграл (это нужно немного обдумать)! Если теперь ввести операторы в картине Гейзенберга

$$\hat{q}(t) = \hat{K}(-t)\hat{q}\hat{K}(t) \tag{9.9}$$

то наше выражение можно записать как

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \langle 0|\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle, \ \ t_1 > t_2 \tag{9.10}$$

При этом важно, что $t_1 > t_2$, в противоположном случае нужно было бы $\hat{q}(t_i)$ расставить в другом порядке. Т.е., мы приходим к формуле

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \langle 0|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle \tag{9.11}$$

связывающей корреляторы, вычисленные двумя способами. Здесь по определению

$$T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) = \begin{cases} t_1 > t_2 : & \hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) \\ t_1 < t_2 : & \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) \end{cases} \tag{9.12}$$

Посмотрим теперь, как будут выглядеть типичные выражения для операторов в теории гармонического осциллятора. Поскольку $\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, значит

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}\hat{a} + e^{it}\hat{a}^\dagger\right) \tag{9.13}$$

Заметим, что в "евклидовом времени" оператор эволюции будет иметь вид $e^{-\hat{H}t}$, потому

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-t}\hat{a} + e^{t}\hat{a}^\dagger\right) \tag{9.14}$$

Обратим внимание и на то, что множители перед операторами решают уравнения движения классической теории $(-\frac{d^2}{dt^2} + 1)q(t) = 0$, следующие из гамильтоновых уравнений для классического предела гамильтониана (9.7).

9.4 Гамильтониан теории свободного скалярного поля

Теперь можно перейти к теории безмассовых бозонов на цилиндре с квадратичным действием

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int\limits_0^L dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \left((\partial_t \phi(x,t))^2 + (\partial_x \phi(x,t))^2\right) \tag{9.15}$$

Нас снова будет интересовать амплитуда перехода за бесконечно малое время, потому было бы логично дискретизировать действие: тогда оно станет очень похожим на квантовую механику, просто с очень большим числом степеней свободы. Напишем дискретизованный вариант действия

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_{i,j} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} (\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1})^2 \right) \tag{9.16}$$

и амплитуды перехода - аналога (9.5)

$$K(\phi_{i+1}, \phi_i | \Delta t) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_j \frac{\Delta x}{\Delta t} (\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1})^2 \right) \tag{9.17}$$

Заметим, что теперь этот оператор эволюции зависит от двух огромных наборов переменных: каждый из ϕ_i, ϕ_{i+1} зависит ещё от “пространственной переменной” j. Потому в непрерывном пределе волновые функции станут *функционалами от* $\phi(x)$ *при фиксированном* t.

Воспользуемся опять знанием о ядре оператора теплопроводности (9.4) [1]

$$\exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_j \frac{\Delta x}{\Delta t} (\phi_j - \tilde{\phi}_j)^2 \right) = \exp\left(2\pi\alpha' \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_j \frac{d^2}{d\phi_j^2} \right) (\phi_i, \tilde{\phi}_i) \tag{9.18}$$

и объединим две экспоненты, как и в случае квантовой механики (9.5)

$$K(\phi_i, \tilde{\phi}_i | \Delta t) \approx \exp\left(-\Delta t \left(-\frac{\pi\alpha'}{2\Delta x} \sum_j \frac{d^2}{d\phi_j^2} + \frac{1}{2\pi\alpha' \Delta x} \sum_j (\phi_j - \phi_{j+1})^2 \right) \right) \tag{9.19}$$

Для того, чтобы перейти в этом выражении к непрерывному пределу, нужно заменить $\frac{1}{\Delta x}\frac{d}{d\phi_j} \mapsto \frac{\delta}{\delta\phi(x)}$ – на вариационную производную, $\phi_{j+1} - \phi_j \mapsto \Delta x \cdot \partial_x \phi(x)$, $\sum_j \mapsto \frac{1}{\Delta x}\int dx$.

[1] Для того, чтобы предел получился хорошим и очевидным, нужно стремить Δx и Δt к нулю так, чтобы их отношение тоже стремилось к нулю, но это - тонкости.

При этом возникают очевидные коммутационные соотношения $[\frac{\delta}{\delta\phi(x)}, \phi(y)] = \delta(x-y)$, а непрерывный гамильтониан оказывается равен

$$\hat{H} = \int_0^L \left(-\frac{\pi\alpha'}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)^2} + \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_x \phi(x))^2 \right) dx \tag{9.20}$$

и может быть представлен, как мы увидим, в виде гамильтониана бесконечной системы гармонических осцилляторов.

9.5 Пространство состояний

Теперь нашей задачей будет расправиться с гамильтонианом (9.20) так же, как мы расправились с осциллятором. Здесь для этого полезно сделать преобразование Фурье:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \phi_n, \qquad \frac{\delta}{\delta\phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \exp\left(\frac{-2\pi i n x}{L}\right) \frac{\partial}{\partial\phi_n} \tag{9.21}$$

Такой выбор коэффициентов связан с тем, что

$$\sum_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = L\delta(x), \qquad \int_0^L dx \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = L\delta_{n,0} \tag{9.22}$$

Подставив эти разложения в гамильтониан (9.20) получим

$$\begin{aligned} \hat{H} = \sum_n \left(-\frac{\pi\alpha'}{2} \frac{\partial^2}{\partial\phi_n \partial\phi_{-n}} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} \phi_n \phi_{-n} \right) = \\ = \pi\alpha' \sum_{n>0} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_n \partial\phi_{-n}} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_n \phi_{-n} \right) - \frac{\pi\alpha'}{2} \frac{\partial^2}{\partial\phi_0^2} \end{aligned} \tag{9.23}$$

Пользуясь опытом с гармоническим осциллятором, подберем и здесь подходящие операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_n = -i\sqrt{\frac{\alpha' L}{4}} \left(\frac{\partial}{\partial\phi_n} + \frac{2n}{\alpha' L} \phi_{-n} \right), \qquad \hat{\bar{a}}_n = -i\sqrt{\frac{\alpha' L}{4}} \left(\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}} + \frac{2n}{\alpha' L} \phi_n \right) \tag{9.24}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} \left[\hat{a}_k, \hat{\bar{a}}_m\right] = 0 \\ [\hat{a}_k, \hat{a}_m] = k\delta_{k+m,0}, \qquad \left[\hat{\bar{a}}_k, \hat{\bar{a}}_m\right] = k\delta_{k+m,0} \end{gathered} \tag{9.25}$$

т.е. почти как в случае осциллятора, если определить $\hat{a}_n^\dagger = \hat{a}_{-n}$, и так же для операторов с чертой (здесь черта не соответствует комплексному сопряжению). Эти операторы отвечают рождению и уничтожению гармоник волн, бегущих влево и вправо.

Используя соотношения

$$\hat{a}_{-n}\hat{a}_n = \frac{\alpha' L}{4}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_{-n}\partial\phi_n} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_{-n}\phi_n + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_n\frac{\partial}{\partial\phi_n} - \frac{2n}{\alpha' L}\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}}\phi_{-n}\right) \tag{9.26}$$

и

$$\hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n = \frac{\alpha' L}{4}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_{-n}\partial\phi_n} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_{-n}\phi_n - \frac{2n}{\alpha' L}\frac{\partial}{\partial\phi_n}\phi_n + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}}\right) \tag{9.27}$$

запишем гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{2\pi}{L}\sum_{n>0}\left(\hat{a}_{-n}\hat{a}_n + \hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n + 1\right) + \frac{2\pi}{L}\hat{a}_0^2 \tag{9.28}$$

Помимо нулевой моды $\hat{a}_0 \sim \frac{\partial}{\partial\phi_0}$, которая коммутирует со всеми другими осцилляторными операторами, удобно ввести нулевые “генераторы Вирасоро”

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}\hat{a}_0^2 + \sum_{n>0}\hat{a}_{-n}\hat{a}_n, \qquad \hat{\bar{L}}_0 = \frac{1}{2}\hat{\bar{a}}_0^2 + \sum_{n>0}\hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n \tag{9.29}$$

которые отвечают отдельно левым и правым модам и, очевидно, коммутируют между собой.

Как и раньше, потребуем, чтобы волновая функция основного состояния убивалась операторами уничтожения (заодно и поймём, кто из них - уничтожения). Если решением уравнений $\hat{a}_{n>0}\Psi[\phi] = 0$, $\hat{\bar{a}}_{n>0}\Psi[\phi] = 0$, $\hat{a}_0\Psi[\phi] = 0$ будет нормированная волновая функция, значит мы угадали. Результат

$$\Psi[\phi] = \exp\left(-\sum_{n>0}\frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\phi_n\right) = \exp\left(-\frac{2}{\alpha' L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2\right) \tag{9.30}$$

хорошо убывает на бесконечности, значит всё правильно. Эта волновая функция является функцией от бесконечного количества фурье-компонент поля в заданный момент времени. Так и должно быть: мы ведь уже поняли, что теперь волновые функции будут не функциями, а функционалами.

Таким образом операторами рождения будут $\hat{a}_{-n}$ и $\hat{\bar{a}}_{-n}$ при $n > 0$. Вычислим, на сколько изменяет энергию (точнее, собственное значение $\hat{L}_0$) применение $\hat{a}_{-n}$. Пусть $\hat{L}_0|\Delta\rangle >= \Delta|\Delta\rangle$, тогда

$$\hat{L}_0(\hat{a}_{-n}|\Delta\rangle) = [\hat{L}_0, \hat{a}_{-n}]|\Delta\rangle + \hat{a}_{-n}\hat{L}_0|\Delta\rangle = [\hat{a}_{-n}\hat{a}_n, \hat{a}_{-n}]|\Delta\rangle + \hat{a}_{-n}\hat{L}_0|\Delta\rangle = (\Delta + n)\,\hat{a}_{-n}|\Delta\rangle \tag{9.31}$$

т.е. действие $\hat{a}_{-n}$ увеличивает энергию на n единиц [2].

Кроме всего прочего, нужно помнить о зависимости от нулевой моды ϕ_0, которая входит в гамильтониан как свободная частица, как квадрат второй производной. Это означает, что каждое состояние будет задаваться ещё и импульсом по этой координате (в теории струн это будет импульс центра масс струны), т.е.

$$|\emptyset;\emptyset;p\rangle = \exp\left(-\frac{2}{\alpha' L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2 + i\sqrt{\frac{4}{\alpha' L}}\cdot p\phi_0\right) \tag{9.32}$$

Произвольное состояние записывается как

$$|n_1,...,n_k;m_1,...,m_l;p\rangle = \hat{a}_{-n_1}...\hat{a}_{-n_k}\hat{\bar{a}}_{-m_1}...\hat{\bar{a}}_{-m_l}|\emptyset;\emptyset;p\rangle = |Y_{\mathbf{n}};Y_{\mathbf{m}};p\rangle \tag{9.33}$$

где операторы $\hat{a}_{-n}$ можно упорядочить: $n_1 > ... > n_k$, $m_1 > ... > m_l$, а значит все состояния с заданной энергией и “импульсом” описываются парой диаграмм Юнга [3].

9.6 Выражение для операторов в картине Гейзенберга

Из определения операторов $\hat{a}$ и $\hat{\bar{a}}$ легко получить, что

$$\begin{gathered}\hat{\phi}_n = \frac{-i\sqrt{\alpha' L}}{2n}(\hat{a}_{-n} - \hat{\bar{a}}_n)\\ \hat{\phi}(x) = -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{a}_{-n}-\hat{\bar{a}}_n}{n}\exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) + \frac{\hat{\phi}_0}{\sqrt{L}}\end{gathered} \tag{9.34}$$

Сопрягая оператором эволюции $e^{t\hat{H}}\hat{a}_n e^{-t\hat{H}} = e^{-\frac{2\pi n t}{L}}\hat{a}_n$, получим

$$\begin{gathered}\hat{\phi}(x,t) = -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\hat{a}_{-n}}{n}\exp\left(\frac{2\pi i n(x-it))}{L}\right) + \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\frac{\hat{\bar{a}}_n}{n}\exp\left(\frac{2\pi i n(x+it))}{L}\right)\right) +\\ +\frac{\hat{\phi}_0}{\sqrt{L}} - \frac{2i\pi\sqrt{\alpha'}}{L}\hat{a}_0 t\end{gathered} \tag{9.35}$$

Введём удобное обозначение $z = \exp\left(\frac{2\pi(t+ix)}{L}\right)$, которое отвечает конформному отображению из цилиндра в сферу без пары точек $z = 0, \infty$, тогда

$$\hat{\phi}(z,\bar{z}) = \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{a}_n}{z^n} + \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{\bar{a}}_n}{\bar{z}^n} - \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2}(\hat{a}_0\log z + \hat{\bar{a}}_0\log\bar{z}) + \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}\hat{X} \tag{9.36}$$

[2] Другими словами можно сказать, что свободное скалярное поле эквивалентно системе осцилляторов, нумерующимися натуральными $n > 0$ с частотами $\omega_n = n$.

[3] В данном случае эти операторы коммутируют между собой, потому их упорядочение тривиально.

где мы также ввели ввести переменную $\hat{X}$, сопряжённую к $\hat{a}_0$, т.е. $\frac{\phi_0}{\sqrt{L}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}X$.

Это выражение почти раскладывается на голоморфную и антиголоморфную части, что ожидаемо, исходя из известного вида корреляторов. Кроме того, если взять от него производную, получится честный голоморфный оператор тока

$$\hat{J}(z) = i\partial\phi(z, \bar{z}) = \sum_n \frac{\hat{a}_n}{z^{n+1}} \tag{9.37}$$

Наконец, пару слов нужно сказать о хронологическом упорядочении. Поскольку была сделана экспоненциальная замена, то теперь роль “времени” будет играть радиус, а координаты - угол. Соответственно, хронологическое упорядочения $t > t'$ превратится в радиальное $|z| > |z'|$.