

Задачи 5. Операторный формализм

1. Решите уравнение $\frac{d}{dt}G(x, x_0|t) = D\frac{d^2}{dx^2}G(x, x_0|t)$ при начальном условии $G(x, x_0|0) = \delta(x - x_0)$. Убедитесь, что ядро оператора $e^{tD\frac{d^2}{dx^2}}(x, x_0)$ решает то же самое уравнение с тем же начальным условием.

2. В случае осциллятора вычислите средние $\langle 0|\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)|0\rangle$ и $\langle 0|T\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)|0\rangle$. Какие уравнения они решают? Оператор в гейзенберговской картине равен

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-t}\hat{a} + e^t\hat{a}^\dagger)$$

3. * Пользуясь операторным формализмом, вычислите коррелятор $\langle x(t_1)x(t_2)\rangle$ в евклидовой теории с циклическим временем $t \sim t + \beta$ и действием

$$S[x(t)] = \int_0^\beta dt \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

. Чему будет равен фурье-образ этого коррелятора?

4. * Найдите волновую функцию основного состояния бозонной теории на цилиндре в координатном представлении.

$$\Psi_0[\phi] = \exp\left(-\frac{1}{L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2\right)$$

5. Вычислите в операторном формализме $\langle J(z)J(w)\rangle$. Для чего оказывается нужным радиальное упорядочение?

$$\hat{J}(z) = \sum_n \frac{\hat{a}_n}{z^{n+1}}$$

6. * Запишите в координатном представлении $\hat{a}_{-k}\Psi_0[\phi]$, $\hat{a}_{-k}\hat{a}_{-m}\Psi_0[\phi]$

7. ** Придумайте, как проквантовать фермионную теорию с действием

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \frac{1}{\pi} \int dz d\bar{z} (\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi})$$

Опишите её пространство состояний.

Задачи, отмеченные *, можно не решать, ** – нельзя :-)