1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Теорема Нётер и конформные тождества Уорда

6.1 Симметрии теорий

Иногда случается так, что у функционала действия теории бывают некоторые симметрии. Это буквально значит, что любую конфигурацию поля ϕ можно преобразовать в другую конфигурацию ϕ' таким образом, чтобы

$$S[\phi] = S[\phi'] \tag{6.1}$$

В первую очередь нас будут интересовать такие преобразования, у которых имеется бесконечно малая версия:

$$\phi' = \phi + \epsilon\hat{G}\phi \tag{6.2}$$

где $\hat{G}$ – некоторый оператор, совсем не обязательно линейный.

Рассмотрим для примера действие скалярного поля с нетривиальным самодействием в D измерениях

$$S[\phi(x)] = \int d^Dx \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi)\right) \tag{6.3}$$

Список его симметрий

- Трансляция $\phi(x^\mu) \mapsto \phi(x^\mu + \epsilon^\mu)$, его бесконечно малая версия получается просто разложением в ряд $\phi(x) \mapsto \phi(x) + \epsilon^\mu\partial_\nu\phi(x)$, т.е., генератор бесконечно малого – $\hat{G}\phi(x) = \epsilon^\nu\partial_\nu\phi(x)$
- Вращение $\phi(x^\mu) \mapsto \phi(O^\mu_\nu x^\nu)$, где $O^TO = 1$. Бесконечно малая версия получится если сделать $O = 1 + o$, где $o^T = -o$: $\hat{G}_o\phi = o_{\mu\nu}(x^\nu\partial^\mu)\phi$. Пользуясь антисимметричностью $o_{\mu\nu}$ антисимметризуем это выражение $\hat{G}_{\mu\nu}\phi = (x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu)\phi$

- Если выключить самодействие поля, положив $V = 0$, получим дополнительную симметрию $\phi(x) \mapsto \phi(x) + \epsilon$.

6.2 Теорема Нётер

Рассмотрим теперь самую общую ситуацию. Пускай есть некоторое бесконечно малое преобразование $\phi(x) \mapsto \phi(x) + \epsilon \hat{G}\phi(x)$. Мы будем рассматривать все возможные величины с точностью до $O(\epsilon^2)$, не указывая этого явно. Потому лучше просто считать, что $\epsilon^2 = 0$. По построению

$$\forall \phi : S[\phi + \epsilon \hat{G}\phi] = S[\phi] \tag{6.4}$$

т.к. это симметрия действия. Давайте теперь рассмотрим преобразование $\phi \mapsto \phi + \epsilon(x)\hat{G}\phi$, которое больше не будет являться симметрией и попробуем написать изменение действия в первом порядке. Из предположения, что действие зависит только от ϕ и конечного количества его производных, следует, что

$$S[\phi + \epsilon(x)\hat{G}\phi] = S[\phi] - \int d^D x \epsilon(x) A[\phi](x) \tag{6.5}$$

Теперь проанализируем его приращение. Из формулы (6.4) следует, что $\forall \phi \int d^D x A[\phi](x) = 0$. Без строгого доказательства примем, что из этого следует, что $A[\phi](x) = \partial_\mu j^\mu(x)$. Таким образом получаем, что

$$\boxed{\forall \phi(x), \forall \epsilon(x) : S[\phi + \epsilon(x)\hat{G}\phi] = S[\phi] + \int d^D x \partial_\nu \epsilon(x) j^\nu(x)} \tag{6.6}$$

Эта формула, или её родственники, нам ещё пригодятся в дальнейшем. Пока что давайте попробуем в неё подставить не произвольное $\phi(x)$, а такое, которое решает уравнения движения, т.е., $\delta S[\phi_{EOM}] = 0$. Вариация должна быть равна нулю при *любой* вариации ϕ, в том числе, при выбранной нами. Значит

$$\forall \epsilon(x), \phi = \phi_{EOM} : \int d^D x \epsilon(x) \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{6.7}$$

Таким образом, мы выяснили, что на уравнениях движения $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. На самом деле, это закон сохранения. При разбиении координат на пространство и время он выглядит как $\dot{\rho} + \div \vec{j} = 0$, потому если сосчитать изменение заряда в некоторой области, то получится

$$\frac{dQ_D}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\limits_D \rho = -\int\limits_D \vec{\nabla}\vec{j} = -\int\limits_{\partial D} \vec{j} d\vec{S} \tag{6.8}$$

т.е., изменение заряда в области равно потоку через границу этой области. В частности, если рассматривать полный заряд, то он обязан сохраняться.

Вычислим несколько сохраняющихся зарядов в теории (6.3). Проще всего начать с последнего преобразования $\phi(x) \mapsto \phi(x) + \epsilon$. По нашему рецепту (6.6) вычисляем

$$S[\phi(x) + \epsilon(x)] = S[\phi(x)] + \int d^D x \partial_\mu \epsilon(x) \partial^\mu \phi(x) \tag{6.9}$$

Откуда ток $j^\mu = \partial^\mu \phi$, и он действительно сохраняется на уравнениях движения

6.3 Тензор энергии-импульса и вариации метрики

Рассмотрим теперь первое преобразование для действия (6.3): $\phi \mapsto \phi + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$.

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S[\phi] &= \int d^D x \partial_\mu \phi \partial^\mu (\epsilon^\nu \partial_\nu \phi) - \int d^D x \epsilon^\nu \partial_\nu V(\phi) = \\ &= \int d^D x \partial^\mu \epsilon^\nu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \int d^D x \epsilon^\nu \partial_\nu (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \int d^D x \partial_\nu \epsilon^\nu V(\phi) = \\ &= \int d^D x \partial^\mu \epsilon^\nu \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) \right) = \int d^D x \partial^\mu \epsilon^\nu T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Полученное выражение называется тензором энергии импульса. Оказывается, что он всегда симметричный, хотя это и не очевидно из определения: один индекс выполняет функцию "пространственного", в то время как второй связан с параметром преобразования. Для того, чтобы уравнять их в правах рассмотрим другой подход: а именно, сделаем действие зависящим явно от метрики. Тогда очевидно, что при любых заменах координат с одновременными правильным преобразованием метрики действие не будет меняться. Т.е.,

$$\delta_\phi S[\phi, g] + \delta_g S[\phi, g] = 0 \tag{6.11}$$

Теперь определим тензор энергии-импульса через эту вариацию

$$\delta_g S[\phi, g] = -\frac{1}{2} \int d^D x \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^D x \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{6.12}$$

Это определение автоматически даёт симметричный тензор. Для того, чтобы сравнить его с имеющимся у нас, достаточно вычислить изменение метрики (начинаем мы, при этом, с постоянной)

$$\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} d(x^\mu + \epsilon^\mu) d(x^\nu + \epsilon^\nu) - g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6.13}$$

откуда следует, что

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \tag{6.14}$$

Т.е., изменение действия

$$\delta_\phi S[\phi, g] = -\delta_g S[\phi, g] = \frac{1}{2} \int d^D x (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) T^{\mu\nu} \tag{6.15}$$

Это действительно совпадает с предыдущим определением.

6.4 Преобразования с голоморфным параметром

Теперь рассмотрим действие Полякова для струны

$$S[X^\mu(z,\bar{z})] = \frac{1}{2}\int d^2z \partial X_\mu \bar{\partial} X^\mu \tag{6.16}$$

Рассмотрим список его непрерывных симметрий

- Трансляция в таргет-пространстве $X^\mu \mapsto X^\mu + \epsilon^\mu(z) + \overline{\epsilon^\mu(z)}$, соответствующий генератор бесконечно малого преобразования $(\hat{G}_\epsilon X)^\mu = \epsilon^\mu(z) + \overline{\epsilon^\mu(z)}$
- Вращение таргет-пространства $X^\mu \mapsto O^\mu_\nu$, где $O^T O = 1$. Бесконечно малое вращение: $X^\mu \mapsto X^\mu + o^\mu_\nu(z) X^\nu$, где $o_{\mu\nu} = -o_{\nu\mu}$.
- Конформное преобразование мирового листа $X^\mu(z) \mapsto X^\mu(w(z))$, бесконечно малая версия $X^\mu(z) \mapsto X^\mu(z+\epsilon(z))$, т.е., генератор равен $(\hat{G}_\epsilon X)^\mu = \epsilon \partial X^\mu$

У некоторых из этих преобразований есть новое свойство – они зависят от некоторого голоморфного параметра, потому их получается бесконечное семейство (по крайней мере, если интересоваться локальными преобразованиями). Давайте для таких преобразований проведём все те же рассуждения, только теперь в качестве начального возьмём преобразование с голоморфным $\epsilon(z)$ и деформируем его до $\epsilon(z,\bar{z})$:

$$\boxed{\delta_{\epsilon(z,\bar{z})} S = \int d^2z j(z) \bar{\partial}\epsilon} \tag{6.17}$$

в силу того же аргумента, что при голоморфном параметре изменение должно обнуляться. Кроме того, точно так же можно можно показать, что на уравнениях движение $\bar{\partial} j(z) = 0$.

Можно сосчитать интегралы движения для действия Полякова

- Трансляции в таргет-пространстве (импульс струны): $\delta_{\epsilon(z,\bar{z})} S[X^\mu] = \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial}\epsilon_\mu$, потому $P^\mu(z) = \partial X^\mu(z)$
- Вращения таргет-пространства (момент импульса струны): $\delta_{o(\bar{z})} S = \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial}(o_{\mu\nu}(\bar{z}) X^\nu) = -\int d^2z \partial X^\mu X^\nu \bar{\partial} o_{\mu,\nu} + \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu o_{\mu\nu}$. Давайте отдельно преобразуем второе выражение: $\int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu o_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^2z o_{\mu\nu}(\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu - \partial X^\nu \bar{\partial} X^\mu) = \frac{1}{2}\int d^2z \left(-\partial\bar{\partial} X^\mu X^\nu + \partial\bar{\partial} X^\mu X^\nu\right) + \frac{1}{2}\int d^2z \partial X^\mu X^\nu \bar{\partial} o_{\mu\nu}$. Итого, всё изменение оказывается равно $\delta_{o(\bar{z})} S = -\frac{1}{2}\int d^2z \partial X^\mu X^\nu \bar{\partial} o_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(X^\mu \partial X^\nu - X^\nu \partial X^\mu\right) \bar{\partial} o_{\mu\nu}$. Здесь мы видим, что изменение(6.17) действительно имеет нужную форму, но проверка этого – некоторое нетривиальное вычисление.
- Конформные преобразования (тензор энергии-импульса): $\delta_{\epsilon(z,\bar{z})} S[X^\mu] = \int d^2z \partial X^\nu \bar{\partial}(\epsilon \partial X_\nu) = -\int d^2z \epsilon \partial X_\nu \bar{\partial}\partial X^\nu = -\frac{1}{2}\int d^2z \epsilon \bar{\partial}(\partial X_\nu \partial X^\nu)$, откуда следует, что $T(z) = \frac{1}{2}\partial X_\nu(z) \partial X^\nu(z)$.

6.5 Теорема Нётер

Теперь изучим, что происходит в случае в квантовой теории. А именно, изучим, как изменяется континуальный интеграл при замене переменных с голоморфным параметром:

$$\begin{gathered}\int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[\phi]\right)\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\mathcal{O}_n(z_n) = \\ = \int \mathcal{D}(\phi+\hat{G}_\epsilon\phi)\left(-S[\phi]-\int d^2z\bar{\partial}\epsilon(z,\bar{z})j(z)\right)(1+\hat{G}_\epsilon^{\mathcal{O}})\mathcal{O}_1(z_1)\ldots(1+\hat{G}_\epsilon^{\mathcal{O}})\mathcal{O}_n(z_n)\end{gathered} \tag{6.18}$$

Выражения равны по той причине, что это просто замена переменной интегрирования. По умолчанию будем считать, что мера не меняется при таких преобразованиях. Если это окажется не так, то изменение нужно будет учесть явно как “квантовую” поправку в интеграл движения.

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])\left(-\int d^2z\bar{\partial}\epsilon j(z)+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\hat{G}_\epsilon^{\mathcal{O}}\mathcal{O}_i(z_i)\ldots\mathcal{O}_n(z_n)\right) \tag{6.19}$$

Откуда получаем, что

$$\int d^2z\bar{\partial}\epsilon(z,\bar{z})\langle j(z)\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\mathcal{O}_n(z_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\hat{G}_\epsilon^{\mathcal{O}}\mathcal{O}_i(z_i)\ldots\mathcal{O}_n(z_n)\rangle \tag{6.20}$$

Будем анализировать эту формулу. Правая часть зависит только от $\epsilon(z_i)$ и его производных в силу локальности преобразований, откуда, после интегрирования по частям, сразу следует, что

$$\bar{\partial}\langle j(z)\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\mathcal{O}_n(z_n)\rangle = 0, \quad z\neq z_i \tag{6.21}$$

Откуда следует, что в левой части интеграл с области, в которой $\bar{\partial}\epsilon(z,\bar{z})\neq 0$, можно снять на полюса коррелятора (попутно дописав для красоты $2\pi i$).

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{z_i} dz\epsilon(z)\langle j(z)\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\mathcal{O}_n(z_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\mathcal{O}_1(z_1)\ldots\hat{G}_\epsilon^{\mathcal{O}}\mathcal{O}_i(z_i)\ldots\mathcal{O}_n(z_n)\rangle \tag{6.22}$$

Можно заметить, что и левая, и правая часть распадается на отдельные слагаемые, абсолютно независящие от всех остальных. Потому из неё, на самом деле, получается формула, называемая конформным тождеством Уорда:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\epsilon(z)j(z)\mathcal{O}(w) = \hat{G}_{\epsilon(z)}^{\mathcal{O}}\mathcal{O}(w)} \tag{6.23}$$

Стоит помнить, что это равенство имеет смысл исключительно под корреляторами. Т.е., утверждение заключается в том, что оно должно выполняться при вычислении всех возможных корреляторов с ним.