

Аффинные алгебры Ли и приложения
Экзамен

- 1.** Выпишите все положительные корни для всех классических алгебр Ли и вычислите их длины. Во всех случаях найдите старший корень.
- 2.** Для каких простых алгебр Ли оператор умножения на -1 лежит в группе Вейля W (W реализована в виде операторов на \mathfrak{h}^*)?
- 3.** Пусть e, h, f – стандартный базис \mathfrak{sl}_2 . Выразите коммутатор $[e^n, f^m]$ в $U(\mathfrak{sl}_2)$ через ПБВ базис $f^i h^j e^k$.
- 4.** Нарисуйте все аффинные стенки и альковы для (некрученной) аффинной алгебры Ли типа $A_2^{(1)}$ – с матрицей Картана
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
.
- 5.** Постройте автоморфизм степени два для диаграмм Дынкина алгебр Ли типов A_{2n-1} и D_n . Найдите разложение соответствующих простых алгебр Ли \mathfrak{g} на собственные подпространства $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ относительно индуцированного автоморфизма на \mathfrak{g} . Опишите подалгебру \mathfrak{g}_1 . Докажите, что \mathfrak{g}_{-1} является неприводимым \mathfrak{g}_1 -модулем.
- 6.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Постройте явную реализацию (в терминах алгебр петель) соответствующей аффинной алгебры Ли с помощью инволютивного автоморфизма диаграммы Дынкина типа A_2 .