1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Теорема Нётер и конформные тождества Уорда

7 Применение тождеств Уорда. Алгебры интегралов движения

7.1 Свободные бозоны

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\epsilon(z)j(z)\mathcal{O}(w) = \hat{G}^{\mathcal{O}}_{\epsilon(z)}\mathcal{O}(w)} \tag{7.1}$$

Рассмотрим действие Полякова и экспоненциальные поля (вертексы) в такой теории

$$S[X^\mu] = \frac{1}{2}\int d^2z\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu \tag{7.2}$$

$$\mathcal{O}(z) = e^{ip_\mu X^\mu}(z) \tag{7.3}$$

Как было раньше посчитано, ток, соответствующий симметрии $X^\mu \mapsto X^\mu + \epsilon^\mu(z)$, равен $P^\mu(z) = i\partial X^\mu$. Преобразование экспоненты при такой замене выглядит как

$$\mathcal{O}(z) \mapsto e^{2p_\mu i\epsilon^\mu(z)}\mathcal{O}(z) \tag{7.4}$$

значит бесконечно малое преобразование

$$\hat{G}_\epsilon\mathcal{O} = i\epsilon^\mu(z)p_\mu\mathcal{O}(z) \tag{7.5}$$

Записывая для него тождество Уорда, получаем

$$p^\mu\epsilon_\mu(w)\mathcal{O}(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w \epsilon_\mu(z)P^\mu(z)\mathcal{O}(w) \tag{7.6}$$

Здесь мы впервые приходим к такому понятию, как операторное разложение. А именно, глядя на предыдущую формулу легко понять, что она может быть истинной только в случае, когда

$$P^\mu(z)\mathcal{O}(w) = \frac{p^\mu}{z-w}\mathcal{O}(w) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(w)(z-w)^k \tag{7.7}$$

Первое слагаемое даст нужное выражение, в то время как второе обнулится как интеграл от голоморфной функции. Вообще, операторным разложением двух полей называется ряд Лорана по разности их координат с коэффициентами в виде операторов, стоящих во второй точке.

$$A(z)B(w) = \sum_{k=-N}^{\infty} (z-w)^k C_k(w) \tag{7.8}$$

Мы видим, что конформное тождество Уорда, по сути, фиксирует сингулярную часть операторных разложений полей с током. Из этого знания следует, на самом деле, вид любого коррелятора, в который вставлен ток. Действительно, рассмотрим выражение

$$\langle P^\mu(z) \prod e^{ip_i^\mu} X_\mu(z_i)\rangle \underset{z\to z_i}{=} \frac{p_i^\mu}{z-z_i} \langle \prod e^{ip_i^\mu} X_\mu(z_i)\rangle + reg. \tag{7.9}$$

Но, так как мы знаем все его особые точки и сингулярности в них, то можем просто написать общее выражение как сумму сингулярностей

$$\langle P^\mu(z) \prod e^{ip_i^\mu} X_\mu(z_i)\rangle = \sum_i \frac{p_i^\mu}{z-z_i} \cdot \langle \prod e^{ip_i^\mu} X_\mu(z_i)\rangle \tag{7.10}$$

От этого выражения есть ещё одна радость: мы знаем, что в бесконечности не находится никакого поля, потому там не должно быть особенности у тока, т.е., $\langle J(z)\dots\rangle \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^2}$ Откуда сразу следует закон сохранения заряда

$$\sum_i p_i^\mu = 0 \tag{7.11}$$

иначе коррелятор обязан зануляться. Это условие сохранения импульса можно было получить и непосредственно из континуального интеграла.

В этом месте давайте вместо D-компонентного поля X^μ будем рассматривать только одну компоненту $\phi(z)$ с действием

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^2z \partial\phi\bar{\partial}\phi \tag{7.12}$$

У него, по прежнему, есть симметрия $\phi \mapsto \phi + \epsilon(z)$, которой соответствует ток $J(z) = i\partial\phi(z)$. Попробуем применить тождество Уорда к самому этому току:

$$J(z) \mapsto J(z) + \partial\epsilon(z) \tag{7.13}$$

Применяя тождество Уорда (7.1), получим

$$\partial\epsilon(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\epsilon(z)J(z)J(w) \tag{7.14}$$

Из этой формулы следует, что

$$J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + reg. \tag{7.15}$$

7.2 Корреляоы из тождеств Уорда

Сейчас мы продемонстрируем, что формула (7.15), полученная только из симметрийных соображений, приводит, на самом деле, к явному ответу для всех $2n$ точечных корреляторов $J(z_i)$ (которые, на самом деле, можно было вычислять и явно, пользуясь теоремой Вика).

$$\langle J(z_1)\dots J(z_{2n})\rangle \underset{z_1\to z_i}{=} \frac{1}{(z_1-z_i)^2}\langle J(z_2)\dots\widehat{J(z_i)}\dots J(z_{2n})\rangle + reg. \tag{7.16}$$

Снова, зная аналитические свойства функции, можно явно её вычислить

$$\langle J(z_1)\dots J(z_{2n})\rangle = \sum_{i=2}^{2n}\frac{1}{(z_1-z_i)^2}\langle J(z_2)\dots\widehat{J(z_i)}\dots J(z_{2n})\rangle + reg. \tag{7.17}$$

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение на корреляторы, которое легко решается и даёт известный ответ

$$\langle J(z_1)\dots J(z_{2n})\rangle = \sum_{\{z_i\}=\{x_i\}\cup\{y_i\}}\prod_{ij}\frac{1}{(x_i-y_j)^2} \tag{7.18}$$

Радость от этого в том, что мы смогли вычислить очень многое, почти ничего не зная о теории: зная только то, что у неё есть простая бесконечномерная симметрия.

7.3 Операторная алгебра

Имея симметрию с током $J(z)$, можно определить его действие на пространстве полей через операторные разложения

$$J(z)\mathcal{O}(w) = \sum_k \frac{\mathcal{A}_k\mathcal{O}(w)}{(z-w)^{k+1}} \tag{7.19}$$

по формуле Коши можно выразить эти действия через контурный интеграл

$$\mathcal{A}_k\mathcal{O}(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz(z-w)^k J(z)\mathcal{O}(w) \tag{7.20}$$

Т.е., это изменение поля под действием преобразования с параметром $\epsilon(z) = (z-w)^k$, которое при $k<0$ имеет особенность в точке w. Очень естественным вопросом является вопрос о том, какую алгебру образуют эти операторы.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n\mathcal{A}_m\mathcal{O}(0) &= \oint_{|w|>|z|} dww^n \oint_0 dzz^m J(w)J(z)\mathcal{O}(0) \\
\mathcal{A}_m\mathcal{A}_n\mathcal{O}(0) &= \oint_{|z|>|w|} dzz^m \oint_0 dww^n J(w)J(z)\mathcal{O}(0)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Здесь важно, как именно расположены контуры: контур того тока, который действует первым, всегда расположен ближе к оператору.

$$\begin{gathered}
[\mathcal{A}_n,\mathcal{A}_m]\mathcal{O}(0) = \oint_{|z|=r} dzz^m \left(\oint_{|w|>r} - \oint_{|w|<r}\right) dww^n J(z)J(w)\mathcal{O}(0) = \\
= \oint_{|z|=r} dzz^m \oint_z dww^n J(w)J(z)\mathcal{O}(0) = \oint_{|z|=r} dzz^m \oint_z dww^n \frac{1}{(z-w)^2}\mathcal{O}(0) = \\
= \frac{1}{2\pi i}\oint_0 dznz^{n+m-1}\mathcal{O}(0) = n\delta_{n+m}\mathcal{O}(0)
\end{gathered} \tag{7.22}$$

Откуда сразу следует, что

$$\boxed{[\mathcal{A}_n,\mathcal{A}_m] = n\delta_{n+m}} \tag{7.23}$$

Полученная алгебра называется алгеброй Гейзенберга. Давайте посмотрим, как она действует на экспоненциальные поля

$$J(z)e^{ip\phi(w)} = \frac{p}{z-w}e^{ip\phi(w)} + reg. \tag{7.24}$$

Откуда $\mathcal{A}_{k>0}e^{ip\phi(w)} = 0$, $\mathcal{A}_0 e^{ip\phi(w)} = pe^{ip\phi(w)}$. Отрицательные моды, при этом, действуют как-то, порождая новые поля.

Посмотрим, как вообще устроена эта алгебра. В ней есть $\mathcal{A}_0$, который со всем коммутирует и потому действует константой. Остальные операторы разбиваются в пары $[\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_{-k}] = k$. Потому все представления этой алгебры устроены как бесконечный набор осцилляторов: т.е., вакуумное состояние (старший вектор) убивается всеми операторами уничтожения

$$\mathcal{A}_{k>0}|p\rangle = 0, \quad \mathcal{A}_0|p\rangle = p|p\rangle \tag{7.25}$$

Остальные состояния строятся как

$$\mathcal{A}_{-k_1}\dots\mathcal{A}_{-k_n}|p\rangle \tag{7.26}$$

где $k_1 \geq \dots \geq k_n$ Т.е., глядя на это, мы понимаем, что все поля в бозонной теории получаются из экспоненциальных в результате действия алгебры Гейзенберга.

7.4 Операторные разложения и алгебра Вирасоро

Давайте теперь займёмся более нетривиальной симметрией, а именно, конформной. Ещё раз вычислим тензор энергии-импульса для теории

$$\delta_{\epsilon(z,\bar{z})}S[\phi] = \int d^2z\partial\phi\bar{\partial}(\epsilon\partial X_\nu) = -\int d^2z\epsilon\partial\phi\bar{\partial}\partial\phi = -\frac{1}{2}\int d^2z\epsilon\bar{\partial}(\partial\phi\partial\phi) \qquad (7.27)$$

откуда следует, что $T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 = \frac{1}{2}J(z)^2$.

Давайте аналогично определим действие соответствующих интегралов движения на пространстве полей

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \sum_k \frac{\mathcal{L}_k\mathcal{O}(w)}{(z-w)^{k+2}} \qquad (7.28)$$

И попробуем сосчитать их коммутатор аналогичным способом

$$[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m]\mathcal{O} = \oint_{|z|=r} dzz^m \oint_z dww^nT(w)T(z)\mathcal{O}(0) \qquad (7.29)$$

Для этого необходимо знать операторное разложение $T(w)T(z)$. Для начала заметим, что классическое выражение для $T(z)$ не может быть правильным, т.к. формула (7.18) при любом вычислении выбросит сингулярную часть $\frac{1}{(z-z)^2}$. Хорошим выражением будет так называемое нормальное произведение

$$: J(z)J(w) : \stackrel{def}{=} J(z)J(w) - \frac{1}{(z-w)^2} \qquad (7.30)$$

Другими словами, это означает, что при вычислении средних запрещается спаривать между собой операторы под нормальным упорядочением. Попробуем теперь сосчитать $T(z)T(w)$, представляя, что рядом стоят ещё какие-то операторы, и мы можем спаривать токи либо между собой (получая сингулярные выражения), либо с посторонними операторами.

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{4} : J(z)^2 :: J(w)^2 := \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{: J(z)J(w) :}{(z-w)^2} + \frac{1}{4} : J(z)^2J(w)^2 := \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{: J(w)^2 :}{(z-w)^2} + \frac{: J(z)\partial J(z) :}{z-w} + reg. = \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + reg. \end{aligned} \qquad (7.31)$$

Последняя формула является одной из основных в CFT. Общее утверждение заключается в том, что в общем случае эта формула зависит от одного дополнительного числа, центрального заряда c, который является важнейшей характеристикой системы.

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + reg. \qquad (7.32)$$

Можно её немного исследовать: например возьмём две невзаимодействующих системы, т.е., $T_1(z)T_2(w) = reg.$, и попробуем вычислить операторное разложение для $T(z) = T_1(z) + T_2(z)$

$$T_1(z)T_2(w) = \frac{\frac{1}{2}(c_1 + c_2)}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{7.33}$$

т.е., центральный заряд – аддитивная характеристика. Его можно представлять как некоторым образом определённое "количество степеней свободы". Теперь давайте считать коммутаторы

$$\begin{gathered}
[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m]\mathcal{O} = \oint_{|z|=r} dz z^{m+1} \oint_z dw w^{n+1} \left(\frac{c/2}{(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{w-z} \right) \mathcal{O}(0) = \\
= \left(\frac{c}{12} n(n^2-1) \oint dz z^{m+n-1} + 2(n+1) \oint dz z^{m+n+1} T(z) + \oint dz z^{m+n+2} \partial T(z) \right) \mathcal{O}(0) = \\
= \boxed{\frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} + (n-m)\mathcal{L}_{n+m}} \mathcal{O}(0)
\end{gathered} \tag{7.34}$$

Таким образом, мы получили довольно нетривиальную формулу для коммутатора. Алгебра, порождённая $\mathcal{L}_n$ называется алгеброй Вирасоро.