

Дискретная математика

Листок 1

ВШЭ, факультет математики
первый курс

1. Найдите число решений неравенства $x_1 + \dots + x_k \leq n$ в неотрицательных целых числах.

2. Докажите следующие равенства:

$$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$$
$$\sum_{k=0}^l \binom{l-k}{m} \binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}, \quad n \geq q.$$

3. Найдите число разложений числа $n > 1$, имеющих чётное число чётных частей.

4. Вычислите $\sum_{k=0}^m \binom{m+k}{k} 2^{-k}$.

5. Найдите число элементов в S_n , отвечающих разбиениям $1^{n-4}2^2$ и $1^{n-4}4$.

6. Пусть x, y — q -коммутирующие переменные, т.е. $xy = qyx$. Приведите пример двух матриц x, y , удовлетворяющих этому соотношению. Найдите коэффициенты c_k в разложении $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n c_k x^k y^{n-k}$.

7. Определим разностный оператор первого порядка Δ , действующий на пространстве функций $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле $(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n)$. Найдите коэффициенты a_i и b_k в разложениях

$$(\Delta^k f)(0) = \sum_{i=0}^k a_i f(i), \quad f(n) = \sum_{k=0}^n b_k (\Delta^k f)(0).$$

8. Докажите, что функция $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ является полиномом степени не выше d тогда и только тогда, когда $\Delta^{d+1} f = 0$.

9. Верен ли бином Ньютона $(1+x)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k$ для $n < 0$?

10. Зафиксируем целые неотрицательные числа a, b, c . Докажите равенство

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k} \binom{b+c}{b+k} \binom{c+a}{c+k} (-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a! b! c!}$$