Задачи к экзамену по НИС "Проективная алгебраическая геометрия", модуль 2, 2015-2016 учебный год

Всюду в задачах $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. Пусть и Q – невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^3$ с уравнением $x_0x_1 - x_2x_3$ в подходящей проективной системе координат. Докажите, что имеет место биекция $\phi:\ \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} Q$ такая, что для $i = 1, 2$ и любой точки $x \in \mathbb{P}^1$ образ $\mathbb{P}^1_i(x)$ проективной прямой $pr_i^{-1}(x)$ при вложении $\phi(pr_i^{-1}(x)) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ есть проективная прямая на Q. Она называется *образующей проективной прямой на Q, принадлежащей i-ой серии образующих прямых на Q*.

Задача 2. В условиях задачи 1 пусть $\Phi(x) := \sum_{i=0}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$ – уравнение квадрики Q в произвольной проективной системе координат. *Полярой* $\mathbf{p}_C(\tilde{x})$ *произвольной точки* $\tilde{x} = (\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2 : \tilde{x}_3) \in$: $\mathbb{P}^3$ *относительно квадрики* Q называется плоскость в $\mathbb{P}^3$ с уравнением $\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}/(\tilde{x})x_i = 0$. Рассмотрим поляритет $f:\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} \check{\mathbb{P}}^3,\ x \mapsto \mathbf{p}_C(x)$, и пусть G – множество проективных прямых в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим отображение $\tilde{f}: G \to G$, получаемое по правилу:

$$\tilde{f}(l) = \bigcap_{x\in l}\mathbf{p}_C(x),$$

также называемое поляритетом. Докажите, что:
(i) если l пересекает квадрику Q в двух различных точках y_1 и y_2, то

$$\tilde{f}(l) = \mathrm{Span}(\mathbb{P}^1(x_{11}) \cap \mathbb{P}^1(x_{22}), \mathbb{P}^1(x_{12}) \cap \mathbb{P}^1(x_{21}), \quad \text{где} \quad x_{ij} = pr_i(y_j), \quad i, j = 1, 2;$$

(ii) если l – касательная прямая к Q (в частности, если $l \subset Q$), то

$$\tilde{f}(l) = l.$$

Задача 3. В условиях задачи 2 пусть плоскость $\mathbb{P}^2$ пересекает квадрику Q по невырожденной конике C. Пусть O - полюс плоскости $\mathbb{P}^2$ относительно квадрики Q. Рассмотрим центральную проекцию $p:\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ с центром в точке O. Покажите, что все образующие прямые обеих серий на квадрике Q проектируются при проекции p в прямые семейства касательных прямых к конике .

Задача 4. Пусть a, b, c и a', b', c' – две тройки скрещивающихся прямых в $\mathbb{P}^3$ такие, что каждая из прямых a, b, c пересекает каждую из прямых a', b', c' в точке. Рассмотрим точки $A = a \cap c',\ B = a \cap a',\ C = a' \cap b,\ D = b \cap b',\ E = b' \cap c,\ F = c \cap c'$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в точке. Воспользуйтесь этим фактом и задачей 2 для доказательства теоремы Брианшона.

Задача 5. Пусть C – невырожденная аффинная коника, имеющая центр симметрии O. Всякая прямая, проходящая через точку O, называется *диаметром коники* C. Диаметр l_2 называется *сопряженным* диаметру l_1, если он параллелен касательным, проведенным в точках пересечения C с l_1.
(i) Докажите, что если диаметр l_1 сопряжен диаметру l_2, то и диаметр l_2 сопряжен диаметру l_1.
(ii) Докажите, что диагонали параллелограмма, описанного около коники C, являются ее сопряженными диаметрами.

Задача 6. В условиях задачи 5 докажите, что если l_1 и l_2 – сопряженные диаметры коники C, то любая прямая, параллельная диаметру l_1 и пересекающая конику C в точках A и B, пересекает диаметр l_1 в середине отрезка $[AB]$.

Задача 7. В условиях задачи 5 пусть $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ и C – невырожденная аффинная коника, имеющая центр симметрии O. Предположим, что C – гипербола. Докажите, что любые два сопряженных диаметра гиперболы C гармонически делят ее пару асимптот.

Задача 8. В условиях задачи 6 пусть C не является окружностью. Докажите, что две из четырех касательных, проведенных к C из циклических точек, пересекаются в фокусах коники C, лежащих, скажем, на оси Oa, а две другие пересекаются в двух мнимых точках, лежащих на другой оси Ob коники C.

Задача 9. Пусть C – эллипс или гипербола в евклидовой плоскости. Докажите, что имеется единственная пара сопряженных диаметров коники C, перпендикулярных друг другу. (Они называются *осями* коники C.)

Задача 10. Пусть C – эллипс в евклидовой плоскости, OA и OB – два его сопряженных полудиаметра. Покажите, что можно следующим образом найти оси эллипса C (определение осей дано в предыдущей задаче). Проведем через точку A прямую, перпендикулярную OB, и отложим на ней по обе стороны от точки A отрезки длины $|OB|$. Получим две точки P и Q, и биссектрисы углов, образованных прямыми OP и OQ, будут искомыми прямыми.

Задача 11. Пусть на $\mathbb{P}^2$ даны трехвершинник ABC и точка P, не лежащая на его сторонах. Пусть прямые, соединяющие точку P с вершинами X, Y, Z, пересекают стороны YZ, ZX, XY в точках L, M, N. Обозначим через U, V, W четвертые гармонические точки для точки P относительно пар точек (X, L), (Y, M), (Z, N). Докажите, что трехвершинник ABC вписан в трехвершинник UVW.

Задача 12. В условиях и обозначениях задачи 12 докажите, что существует коника, касающаяся прямых VW, WU, UV в точках X, Y, Z соответственно.

Задача 13. Выясните проективный смысл теорем Чевы и Менелая. (Интересен ответ как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$.)

Задача 14. Пусть C – невырожденная коника на $\mathbb{P}^2$. Пусть $f : C \to C$ – инволюция на C. Как известно, прямые, соединяющие точки $X \in C$ с точками $f(X)$, проходят через точку $X \in \mathbb{P}^2 \setminus C$. Эта точка X называется *вершиной* инволюции f. Докажите, что две инволюции f_1 и f_2 перестановочны (т.е. $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$) тогда и только тогда, когда их вершины сопряжены относительно C.

Задача 15. Докажите, что если все вершины двух треугольников лежат на конике, то все их стороны касаются некоторой коники, и обратно.

Задача 16. Докажите, что если два треугольника автополярны относительно некоторой невырожденной коники, то все их вершины лежат на некоторой другой конике, а все их стороны касаются некоторой третьей коники.

Задача 17. Докажите, что длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, описанного около данного эллипсоида, независит от от положения параллелепипеда, т. е. вершины всех таких параллелепипедов лежат на одной сфере.

Задача 18. Докажите, что пары противоположных сторон полного четырехвершинника на $\mathbb{P}^2$ пересекают прямую $\mathbb{P}^1$ общего положения в $\mathbb{P}^2$ в парах точек соответственных точек одной инволюции $\mathbb{P}^1$. (Она называется *инволюцией Дезарга* на $\mathbb{P}^1$.)

Задача 19. (Коника 11 точек.) Пусть A, B, C, D – проективный репер (т.е. никакие три из этих точек не компланарны). Обозначим точки $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$ и l - прямая, не содержащая ни одной из семи точек A, B, C, D, P, Q, R. Тогда существует

коника, проходящая через следующие 11 точек:
1) точки P, Q, R;
2) точку U', гармонически сопряженную точке $U = AB \cap l$ относительно пары точек A, B, и пять точек, аналогичным образом связанных с прямыми AC, AD, BC, BD и CD;
3) две неподвижные точки инволюции Дезарга на l (если они существуют), построенной на l четырехвершиннику $ABCD$ (см. определение в задаче 17).

Задача 20. Над полем $\mathbb{R}$ в условиях предыдущей задачи, в случае, когда l – несобственная прямая, плоскость евклидова, а точка D - ортоцентр треугольника ABC, сформулируйте и выведите из задачи 18 ее частный случай – теорему об окружности 9 точек. Докажите, что в этом случае центр S окружности 9 точек связан с точками A, B, C, D аффинным соотношением:

$$S = \frac{1}{4}(A + B + C + D).$$

Задача 21. Пусть C – невырожденная коника на $\mathbb{P}^2$, P – точка вне коники C, l – ее поляра относительно C, а Q и R – точки пересечения l с C. Докажите, что для любых двух различных точек M и N на C, отличных от Q и R, справедливо следующее соотношение между двойными отношениями:

$$(PQ, PR, PM, PN) = (QRMN)^2.$$

Задача 22. Пусть $ABCD$ – четырехугольник на евклидовой плоскости π, помещенной в евклидово пространство. Покажите, как выбрать центр проекции A и плоскость проекции α, чтобы, спроектировав $ABCD$ из центра A на плоскость α, получить в ней
(i) параллелограмм,
(ii) прямоугольник,
(iii) ромб,
(iv) квадрат.

Задача 23. Пусть A, B, C, D – проективный репер на плоскости, X, Y, Z – точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD, AD и BC соответственно, а P – точка, отличная X, Y, Z. Докажите, что поляры точки P относительно всех коник пучка с базисными точками A, B, C, D проходят через одну точку.

Задача 24. Пусть V – вещественное $(n+1)$-мерное векторное пространство. Его комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ определяется как пространство $V \oplus V$ со структурой умножения на мнимую единицу i (а тем самым, и на все комплексные числа по $\mathbb{R}$-линейности) по формуле: $i(x, y) := (-y, x)$. Рассмотрим вложение V в $V^{\mathbb{C}}$ по формуле: $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}},\ x \mapsto (x, 0)$. Это вложение $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ индуцирует отображение проективных пространств как множеств (и, более того, как вещественных многообразий, хотя этот вопрос здесь не рассматривается) по формуле

$$\phi : \mathbb{RP}^n = P(V) \hookrightarrow P(V^{\mathbb{C}}) = \mathbb{CP}^n,\ < x >_{\mathbb{R}} \mapsto < (x, 0) >_{\mathbb{C}}.$$

Докажите, что:
(i) отображение множеств ϕ определено корректно;
(ii) это отображение инъективно.