1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Теорема Нётер и конформные тождества Уорда

7 Применение тождеств Уорда. Алгебры интегралов движения

8 Представления алгебры Вирасоро

8.1 Модуль Верма

В прошлый раз мы вычислили коммутационные соотношения в алгебре Вирасоро

$$[L_n, L_m] = \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} + (n-m)L_{n+m} \tag{8.1}$$

Давайте теперь немного её поизучаем. Например, в ней есть достаточно очевидная подалгебра, порождённая $L_0, L_{\pm 1}$

$$\langle L_{-1}, L_0, L_1 \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2 \tag{8.2}$$

Вообще, интересно заметить, что алгебра Вирасоро является расширением алгебры векторных полей на плоскости без двух точек

$$l_n = -l^{n+1}\partial_z, \quad [l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m} \tag{8.3}$$

Если пользоваться этой аналогией, что $\mathfrak{sl}_2$ подалгебра в алгебра Вирасоро соответствует векторным полям, задающим глобальные конформные преобразования

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \tag{8.4}$$

Ещё интересным и местами полезным фактом является то, то все генераторы $L_{k>0}$ порождаются только парой L_1, L_2.

Запишем отдельно коммутационные соотношения с L_0

$$
\begin{aligned}
[L_0, L_{-n}] &= nL_{-n} \\
[L_0, L_n] &= -nL_n
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Мы хотим строить представление этой алгебры, выбрав в качестве базиса собственные вектора для L_0: $L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle$. Легко видеть, что

$$
L_0 \cdot L_{-n}|\Delta\rangle = L_{-n}L_0|\Delta\rangle + nL_{-n}|\Delta\rangle = (\Delta + n)L_{-n}|\Delta\rangle \tag{8.6}
$$

Т.е., получается, что отрицательные генераторы играют роль "операторов рождения": они увеличивают размерность. Дальше из физических соображений нужно потребовать, чтобы в теории были только поля с положительными размерностями (требование продиктовано тем, что их корреляционные функции обязаны спадать с расстоянием). Реально это бывает и не так: требование, которое всегда выполняется, это требование конечности количества полей с отрицательной размерностью. Пользуясь этим требованием, мы видим, что при действии на любое поле "операторами уничтожения" $L_{n>0}$ в какой-то момент обязательно должно получиться состояние, на которое все они действуют нулём. Иначе размерность могла бы бесконечно уменьшаться. Значит есть такое состояние, что

$$
\begin{aligned}
L_n|\Delta\rangle &= 0 \\
L_0|\Delta\rangle &= \Delta|\Delta\rangle
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

Такое состояние называют старшим вектором. Все поля в теории получаются из таких при применении отрицательных генераторов

$$
V(c, \Delta) = \langle L_{-n_1} \dots L_{-n_k}|\Delta\rangle\rangle\,, \quad n_1 \geq \dots \geq n_k \tag{8.8}
$$

Данная конструкция называется модулем Верма, и при общих значениях c и Δ является неприводимым представлением алгебры Вирасоро (это требует доказательства, но мы примем на веру).

Теперь было бы логично было бы сосчитать размерность модуля Верма, но она бесконечна. Потому давайте разобьём его на подпространства с одинаковым собственным значением L_0:

$$
V(c, \Delta) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n(c, \Delta) \tag{8.9}
$$

Имеет смысл считать размерности этих компонент, объединяя их в производящую функцию

$$
\dim_q V(c, \Delta) = \sum_{i=0}^{\infty} q^{n+\Delta} \dim V_n(c, \Delta) = \operatorname{tr} q^{L_0} \tag{8.10}
$$

Каждую из размерностей в этом ряду вычислить точно (написать замкнутую формулу) невозможно, но вычислить производящую функцию, ещё называемую квантовой размерностью или характером, оказывается довольно просто. Утверждение:

$$\operatorname{tr} q^{L_0} = \frac{q^{\Delta}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} \tag{8.11}$$

Доказательство выглядит довольно просто:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n+q^{2n}+q^{3n}+\ldots) \tag{8.12}$$

Каждый из множителей в произведении соответствует оператору L_{-n}, степень $q^{k\cdot n}$ соответствует тому, что этот оператор был взят k раз. Когда мы будем раскрывать скобки, то выбор слагаемого из каждой скобки будет соответствовать выбору того, в какой именно степени нужно взять конкретный генератор L_{-n}.

Стоит заметить, что размерности $\dim V_n(c,\Delta) = p(n)$ имеют своё название, числа разбиений (количество способов, которым число представляется в виде суммы натуральных чисел). Первые несколько членов производящей функции равны

$$\operatorname{tr} q^{L_0-\Delta} = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \ldots \tag{8.13}$$

Давайте выпишем базисы в соответствующих им пространствам

$$\begin{aligned}
V_0 =& \langle |\Delta\rangle \rangle \\
V_1 =& \langle L_{-1}|\Delta\rangle \rangle \\
V_2 =& \langle L_{-1}^2|\Delta\rangle, L_{-2}|\Delta\rangle \rangle \\
V_3 =& \langle L_{-1}^3|\Delta\rangle, L_{-2}L_{-1}|\Delta\rangle, L_{-3}|\Delta\rangle \rangle \\
V_4 =& \langle L_{-1}^4|\Delta\rangle, L_{-2}L_{-1}^2|\Delta\rangle, L_{-2}^2|\Delta\rangle, L_{-3}L_{-1}|\Delta\rangle, L_{-4}|\Delta\rangle \rangle
\end{aligned} \tag{8.14}$$

8.2 Вырожденные представления

Иногда случается такое, что модуль Верма содержит некоторый нетривиальный подмодуль: т.е., в нём есть ещё один вектор $|\chi\rangle$, такой что $L_k|\chi\rangle = 0$. Давайте рассмотрим, когда такое может случиться на первой полочке

$$L_k L_{-1}|\Delta\rangle = L_{-1}L_k|\Delta\rangle + (k+1)L_{k-1}|\Delta\rangle = 2\delta_{k,1}\Delta|\Delta\rangle \tag{8.15}$$

Т.е., при $\Delta = 0$ мы получаем новый старший вектор и подмодуль, растущий из него. Нас всегда будут интересовать неприводимые представления, т.к. вектора подпредставлений имеют нулевую норму. Давайте отфакторизуем модуль Верма по найденному подмодую и вычислим характер того, что остаётся:

$$\dim_q \tilde{V}(c,0) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} - \frac{q}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} = \frac{1}{\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^n)} = 1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + \dots \tag{8.16}$$

т.е., как и должно быть, размерности становятся значительно меньше.

8.3 Действие на пространстве полей

Мы помним, что на самом деле в конформной теории задано действие алгебры Вирасоро на пространстве полей. Было бы интересно понять, чему соответствуют абстрактные модули Верма с точки зрения этого абстрактного действия.

Для начала вспомним определение действия на поля

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \sum_n \frac{\mathcal{L}_n \mathcal{O}(w)}{(z-w)^{n+2}} \tag{8.17}$$

проще всего рассмотреть операторное разложение с единичным оператором

$$T(z)1(w) = T(z) = T(w) + \partial T(w)(z-w) + \partial^2 T(w)\frac{(z-w)^2}{2} + \dots \tag{8.18}$$

т.е., мы видим следующие равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k\geq -1}1(w) &= 0 \\ \mathcal{L}_{-2}1(w) &= T(w) \end{aligned} \tag{8.19}$$

Т.е., рассмотренный нами вырожденный модуль Верма является, на самом деле, единичным модулем, содержащим в себе сам тензор энергии-импульса.

Теперь вспомним конформное тождество Уорда

$$\hat{G}_\epsilon \mathcal{O}(w) = \oint_w dz \epsilon(z) T(z) \mathcal{O}(w) \tag{8.20}$$

Для начала можно применить его к произвольным полям, для которых известно только преобразование при трансляции $\mathcal{O}(z) \mapsto \mathcal{O}(z+\epsilon)$

$$\partial \mathcal{O}(w) = \oint_w dz T(z)\mathcal{O}(w) = \mathcal{L}_{-1}\mathcal{O}(w) \tag{8.21}$$

Откуда следует, что всегда

$$\mathcal{L}_{-1} = \partial \tag{8.22}$$

Потому и не удивительно, что на единичный оператор он действовал нулём. Если теперь написать то же для поля с определённой размерностью, преобразующегося как $\mathcal{O}(z) \mapsto \lambda^{\Delta}\mathcal{O}(\lambda z)$, то получится

$$(\Delta + w\partial)\mathcal{O}(w) = \oint_w dzzT(z)\mathcal{O}(w) = \mathcal{L}_0\mathcal{O} + w\mathcal{L}_{-1}\mathcal{O} \tag{8.23}$$

Откуда следует, что для всех полей определённой размерности Δ

$$\mathcal{L}_0\mathcal{O}(w) = \Delta\mathcal{O}(w) \tag{8.24}$$

Теперь рассмотрим произвольное поле, которое преобразуется как дифференциальная форма веса Δ, т.е., $(dz)^{\Delta}\mathcal{O}(z) = inv$ (такие поля называются примарными или первичными).

$$\mathcal{O}(z) \mapsto \mathcal{O}(w(z))\left(\frac{dw(z)}{dz}\right)^{\Delta} = \mathcal{O}(z+\epsilon(z))\left(1+\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta} \approx \mathcal{O}(z) + \epsilon\partial\mathcal{O}(z) + \Delta\partial\epsilon\cdot\mathcal{O}(z) \tag{8.25}$$

Т.е.. тождество Уорда будет означать, что

$$\hat{G}_{\epsilon}\mathcal{O}(w) = \epsilon\partial\mathcal{O}(w) + \Delta\partial\epsilon\cdot\mathcal{O}(w) = \oint dz\epsilon(z)T(z)\mathcal{O}(w) \tag{8.26}$$

Это равенство может выполняться только при условии, что

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \frac{\Delta\mathcal{O}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{O}(w)}{z-w} + reg. \tag{8.27}$$

т.е., $\mathcal{L}_{k>0}\mathcal{O}(w) = 0$. Таким образом, мы отождествили примарные поля со старшими векторами модулей Верма.

Как мы уже знаем, операторное разложение тензора энергии-импульса с самим собой содержит ещё дополнительное полюсное слагаемое. Это согласуется с тем, что сам $T(z)$ является потомком единичного оператора. Для замкнутости картины хотелось бы понять, как он преобразуется при общих конформных преобразованиях. Для этого нужно немного обратить логики использования конформного тождества Уорда: теперь по известному OPE мы будем восстанавливать закон преобразования

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\epsilon}T(w) = \oint dz\epsilon(z)T(z)T(w) = \oint dz\epsilon(z)\left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}\right) = \\ = \frac{c}{12}\epsilon'''(w) + 2\epsilon' T(w) + \epsilon\partial T(w)\end{aligned} \tag{8.28}$$

Оказывается, что такой закон бесконечно малого преобразования соответствует конечному преобразованию

$$T(z) \mapsto T(w(z))\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{c}{12}\{w,z\} \tag{8.29}$$

Где $\{w, z\}$ уже известная нам производная Шварца, задаваемая формулой

$$\{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 \tag{8.30}$$

8.4 Вычисление средних от потомков

Дальше хочется продемонстрировать, что для того, чтобы получить все корреляторы в теории, достаточно получить все корреляторы примарных полей, остальные при этом будут выражаться из них достаточно простым образом. Из формулы (8.17) следует, что для этого нужно научиться выражать через корреляторы примарных полей все корреляторы вида

$$\langle T(w_1)\dots T(w_k)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle \tag{8.31}$$

Начнём с самого простого

$$\langle T(w)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle \underset{w\to z_i}{=} \left(\frac{\Delta_i}{(w-z_i)^2} + \frac{\partial_i}{w-z_i}\right)\langle\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle + reg. \tag{8.32}$$

Других полюсов у выражения нету, потому мы сразу получаем формулу

$$\langle T(w)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta_i}{(w-z_i)^2} + \frac{\partial_i}{w-z_i}\right)\langle\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle \tag{8.33}$$

Для двух тензоров энергии-импульса всё будет немного сложнее

$$\begin{gathered}\langle T(w_1)T(w_2)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta_i}{(w_1-z_i)^2} + \frac{\partial_i}{w_1-z_i}\right)\langle T(w_2)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle + \\ + \frac{c/2}{(w_1-w_2)^4}\langle\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle + \frac{2}{(w_1-w_2)^2}\langle T(w_2)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle + \\ + \frac{\partial_{w_2}}{w_1-w_2}\langle T(w_2)\mathcal{O}(z_1)\dots\mathcal{O}(z_n)\rangle\end{gathered} \tag{8.34}$$

После чего можно подставить выражения для средних с одним тензором энергии-импульса и довести ответ до конечной формулы в терминах дифференциального оператора, действующего на коррелятор приманых полей.