

- 1 Вводная лекция
- 2 Квантование релятивистской частицы
- 3 Континуальный интеграл
- 4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции
- 5 Двумерные теории бозонов и фермионов
- 6 Переход к операторному формализму
- 7 Теория скалярного поля и алгебра Вирасоро
- 8 Тензор энергии-импульса и примарные операторы
- 9 Фермионы и системы первого порядка

### 9.1 Конформная $bc$ -система

Рассмотрим теперь двумерную конформную свободную теорию грассмановых  $bc$ -полей спинов  $(j, 0)$  и  $(1 - j, 0)$  для полей  $c$  и  $b$  соответственно с действием первого порядка

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma b \bar{\partial} c \quad (9.1)$$

и будем считать поля нормированными так, чтобы их корреляционная функция была

$$\langle b(z)c(z') \rangle = \frac{1}{z - z'} \quad (9.2)$$

являющейся следствием формулы Коши

$$\bar{\partial} \frac{1}{z - z'} = \pi \delta^{(2)}(z - z') \quad (9.3)$$

Как и в случае свободного скалярного поля введем нормальное произведение

$$: b(z)c(z') := b(z)c(z') - \langle b(z)c(z') \rangle = b(z)c(z') - \frac{1}{z - z'} \quad (9.4)$$

которое уже несингулярно при  $z \rightarrow z'$ .

Тензор энергии-импульса можно строить разными способами. Мы воспользуемся тем, что голоморфная компонента тензора энергии-импульса  $\bar{\partial}T_{bc} = 0$  веса 2 может содержать только два слагаемых

$$T = T_{bc} = \alpha : b\partial c : + \beta : c\partial b : \quad (9.5)$$

коэффициенты при которых можно зафиксировать воспроизводя операторные разложения

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \frac{j}{(z-w)^2}c(w) + \frac{1}{z-w}\partial c(w) + \dots \\ T(z)b(w) &= \frac{1-j}{(z-w)^2}b(w) + \frac{1}{z-w}\partial b(w) + \dots \end{aligned} \quad (9.6)$$

говорящие о том, что духовые поля  $c$  и  $b$  являются примарными полями с весами  $j$  и  $(1-j)$  соответственно. Вычислим, например, первое операторное разложение

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \alpha : b(z)\partial c(z) : c(w) + \beta : c(z)\partial b(z) : c(w) = \\ &= -\alpha \frac{1}{z-w}\partial c(z) - \beta \frac{1}{(z-w)^2}c(z) + \dots = \\ &= -\beta \frac{1}{(z-w)^2}c(w) - \frac{\alpha + \beta}{z-w}\partial c(w) + \dots \end{aligned} \quad (9.7)$$

откуда следует  $\beta = -j$ ,  $\alpha + \beta = -1$  или

$$T = (j-1) : b\partial c : -j : c\partial b : \quad (9.8)$$

Нетрудно убедиться, что второе из соотношений (9.6) при этом удовлетворяется автоматически.

Что касается центрального заряда, то его опять следует искать как самый сингулярный член в операторном разложении

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= (j-1)^2 : b(z)\partial c(z) :: b(w)\partial c(w) : + j^2 : c(z)\partial b(z) :: c(w)\partial b(w) : - \\ &-j(j-1) : b(z)\partial c(z) :: c(w)\partial b(w) : -j(j-1) : c(z)\partial b(z) :: b(w)\partial c(w) : \end{aligned} \quad (9.9)$$

Самый сингулярный член сводится к произведению попарных корреляционных функций. С учетом антикоммутативности полей получаем

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= -(j-1)^2 \langle b(z)\partial c(w) \rangle \langle b(w)\partial c(z) \rangle - j^2 : \langle \partial b(z)c(w) \rangle \langle \partial b(w)c(z) \rangle - \\ &-j(j-1) \langle b(z)c(w) \rangle \langle \partial b(w)\partial c(z) \rangle - j(j-1) \langle b(w)c(z) \rangle \langle \partial b(z)\partial c(w) \rangle + \dots = \\ &= -(j-1)^2 \frac{1}{(z-w)^2} \frac{1}{(w-z)^2} - j^2 \frac{-1}{(z-w)^2} \frac{-1}{(w-z)^2} - \\ &-j(j-1) \frac{1}{z-w} \frac{-2}{(w-z)^3} - j(j-1) \frac{1}{w-z} \frac{-2}{(z-w)^3} + \dots = \\ &= -\frac{1}{(z-w)^4} ((j-1)^2 + j^2 + 4j(j-1)) + \dots = -\frac{1}{(z-w)^4} (6j^2 - 6j + 1) + \dots \end{aligned} \quad (9.10)$$

откуда следует, что центральный заряд грассмановой  $bc$ -системы

$$c_{bc} = -2(6j^2 - 6j + 1) \quad (9.11)$$

Эта ровно та формула, которая необходима для вычисления конформной аномалии в теории бозонных струн и суперструн, наряду с уже вычисленным центральным зарядом скалярного поля  $c = 1$ . Её важные частные случаи

- $j = -1, 1 - j = 2, c = -26$  что дает критическую размерность бозонной струны как результат вычисления конформной аномалии в  $bc$ -системе, отвечающей духам репараметризаций, или глобально определенных векторных полей;
- $j = 1 - j = \frac{1}{2}, c = 1$ : двумерный комплексный фермион Дирака-Вейля, для которого представление алгебры Вирасоро имеет то же значение центрального заряда, что и для (голоморфной части) теории свободных бозонов. Эквивалентны ли эти представления?

## 9.2 Теория двумерных фермионов в операторном формализме

Действие Вейля для двумерных безмассовых комплексных фермионов является частным случаем грассмановой  $bc$ -системы с  $j = 1 - j = \frac{1}{2}$ , т.е.

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} d^2z \tilde{\psi} \bar{\partial} \psi \quad (+c.c.) \quad (9.12)$$

где  $\tilde{\psi}$  и  $\psi$  -  $1/2$ -дифференциалы на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения <sup>1</sup>

$$\bar{\partial} \psi = 0, \quad \partial \tilde{\psi} = 0 \quad (9.13)$$

и для которых рассуждение с гауссовым интегралом приводит к операторному разложению

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z)\psi(z') &= \frac{1}{z-z'} + : \tilde{\psi}(z)\psi(z') : = \\ &= \frac{1}{z-z'} + J(z) + (z-z') : \partial \tilde{\psi}\psi(z') : + \dots \end{aligned} \quad (9.14)$$

В формуле (9.14) мы ввели нормальное упорядочение по фермионному вакууму (пока еще не определенному, но удовлетворяющему  $\langle 0 | : (\dots) : | 0 \rangle = 0$ ) и фермионный голоморфный

---

<sup>1</sup>Для “анти-голоморфной части” действия все утверждения получают формальным комплексным сопряжением.

$U(1)$ -ток <sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
J(z) &=: \tilde{\psi}(z)\psi(z) : \\
J(z)\psi(z') &= -\underbrace{\tilde{\psi}(z)\psi(z')}_{} \psi(z) + \dots = -\frac{\psi(z')}{z-z'} + \dots \\
J(z)\tilde{\psi}(z') &= \tilde{\psi}(z)\underbrace{\psi(z)\tilde{\psi}(z')}_{} + \dots = \frac{\tilde{\psi}(z')}{z-z'} + \dots
\end{aligned} \tag{9.15}$$

А как следует из (9.8) - тензор энергии-импульса

$$T = -\frac{1}{2} \left( : \tilde{\psi}\partial\psi : - : \partial\tilde{\psi}\psi : \right) \tag{9.16}$$

Этот тензор энергии-импульса по-прежнему может быть получен конструкцией Сугавары

$$J(z)J(z') = \frac{1}{(z-z')^2} + 2T(z') + O(z-z') \tag{9.17}$$

и поэтому генерирует алгебру Вирасоро с центральным зарядом  $c = 1$ .

Действительно, пользуясь теоремой Вика для фермионов, легко написать

$$\begin{aligned}
& : \tilde{\psi}(z)\psi(z) : : \tilde{\psi}(z')\psi(z') : := \underbrace{\tilde{\psi}(z)\psi(z)\tilde{\psi}(z')\psi(z')}_{\text{}} + \\
& + : \tilde{\psi}(z)\psi(z)\tilde{\psi}(z')\psi(z') : + : \tilde{\psi}(z) : \psi(z)\tilde{\psi}(z') : \psi(z') : + : \tilde{\psi}(z)\psi(z)\tilde{\psi}(z')\psi(z') : := \\
& = \frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'} \left( : \tilde{\psi}(z)\psi(z') : + : \psi(z)\tilde{\psi}(z') : \right) + \dots = \\
& = \frac{1}{(z-z')^2} + : \partial\tilde{\psi}\psi(z') : + : \partial\psi\tilde{\psi}(z') : + \dots
\end{aligned} \tag{9.18}$$

### 9.3 Фермионные моды

На уравнениях движения естественно написать

$$\psi(z) = \sum_r \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \quad \tilde{\psi}(z) = \sum_s \frac{\tilde{\psi}_s}{z^{s+1/2}} \tag{9.19}$$

---

<sup>2</sup>Квадратичный по полям нормально упорядоченный оператор  $J_{bc}(z) =: b(z)c(z) :$  тока или духового числа можно ввести и для  $bc$ -системы любого спина, но при  $j \neq \frac{1}{2}$  этот ток является аномальным. Аномалия проявляется в появлении старшего полюса (третьего порядка) в операторном разложении с тензором энергии-импульса и/или в том, что квантовое среднее  $\langle \partial J_{bc} \rangle$  вообще-говоря не равно нулю, а пропорционально кривизне поверхности  $R_{z\bar{z}}^{(2)}$ . Коэффициенты при старшем полюсе и в уравнении аномалии содержат фактор  $(1-2j)$ .

тогда вычисление *антикоммутатора* даст

$$\begin{aligned} [\tilde{\psi}_r, \psi_s]_+ &= \oint_{C'_0} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{s-1/2} \oint_{C_{z'}} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \tilde{\psi}(z) \psi(z') = \\ &= \oint_{C'_0} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{s-1/2} \oint_{C_{z'}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{r-1/2}}{z-z'} = \oint_{C'_0} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{s+r-1} = \delta_{s+r,0} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Если моды фермионов нумеруются целочисленными индексами  $r, s \in \mathbb{Z}$ , то

- поля в (9.19) неоднозначны при обходе вокруг нуля;
- есть нулевая мода  $[\tilde{\psi}_0, \psi_0]_+ = 1$  (минимальное представление этой алгебры двумерно, например матрицами  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  что существенно, например в теории фермионных струн.)

Однако если мы будем считать  $r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , то неоднозначность и нулевая мода пропадают. При радиальном квантовании для вакуума в  $z = 0$  для несингулярности действия операторов

$$\begin{aligned} \psi(z)|0\rangle &= \left( \dots + \frac{\psi_{3/2}}{z^2} + \frac{\psi_{1/2}}{z} + \psi_{-1/2} + \dots \right) |0\rangle \\ \tilde{\psi}(z)|0\rangle &= \left( \dots + \frac{\tilde{\psi}_{3/2}}{z^2} + \frac{\tilde{\psi}_{1/2}}{z} + \tilde{\psi}_{-1/2} + \dots \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (9.21)$$

можно потребовать

$$\psi_r|0\rangle = \tilde{\psi}_r|0\rangle = 0, \quad r > 0 \quad (9.22)$$

а отрицательные гармоники  $\tilde{\psi}_{-r} = \psi_r^\dagger$ ,  $\psi_{-r} = \tilde{\psi}_r^\dagger$ , при  $r > 0$  считать операторами рождения одночастичных состояний. Тогда, очевидно, что как моды тока

$$J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}, \quad J_n =: \sum_{r+s=n} \tilde{\psi}_r \psi_s : \quad (9.23)$$

и, в частности, оператор заряда (или числа частиц - при этом число античастиц надо вычитать!)

$$J_0 = \sum_{r>0} \left( \tilde{\psi}_{-r} \psi_r - \psi_{-r} \tilde{\psi}_r \right) = \sum_{r>0} \left( \psi_r^\dagger \psi_r - \tilde{\psi}_r^\dagger \tilde{\psi}_r \right) = \sum_{r>0} (n_r - \tilde{n}_r) \quad (9.24)$$

(где  $n_r, \tilde{n}_r$  операторы чисел заполнения для частиц и античастиц, принимающие для фермионов значения только 0, 1 - принцип Паули!) так и генераторы алгебры Вирасоро

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad L_n = \frac{1}{2} : \sum_{r+s=n} (r-s) \tilde{\psi}_s \psi_r : \quad (9.25)$$

в частности

$$\begin{aligned}
L_0 &:= \sum_r r \tilde{\psi}_{-r} \psi_r := \sum_{r>0} r \left( \tilde{\psi}_{-r} \psi_r + \psi_{-r} \tilde{\psi}_r \right) = \\
&= \sum_{r>0} r \left( \psi_r^\dagger \psi_r + \tilde{\psi}_r^\dagger \tilde{\psi}_r \right) = \sum_{r>0} r (n_r + \tilde{n}_r)
\end{aligned} \tag{9.26}$$

выражаются через билинейные комбинации фермионных мод.

Наконец, можно поставить естественный вопрос о вычислении матричных элементов и следов по Гильбертову пространству  $\mathcal{H}$  состояний фермионной системы, которое натягивается на базис

$$|0\rangle \oplus_{r>0} \psi_{-r}|0\rangle \oplus_{r>0} \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle \tag{9.27}$$

двойственным для которого является

$$\langle 0| \oplus_{r>0} \langle 0| \tilde{\psi}_r \oplus_{r>0} \langle 0| \psi_r \tag{9.28}$$

как следствие очевидного спаривания  $\langle 0|0\rangle = 1$ ,  $\langle 0|\tilde{\psi}_r \psi_{-s}|0\rangle = \langle 0|\psi_r \tilde{\psi}_{-s}|0\rangle = \delta_{r,s}$ . Поскольку

$$L_0|0\rangle = 0, \quad L_0 \psi_{-r}|0\rangle = r \psi_{-r}|0\rangle, \quad L_0 \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle = r \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle \tag{9.29}$$

то очевидно, что для следа по полному пространству состояний получаем

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} q^{L_0} = \prod_{r>0} (1 + q^r)^2 = \prod_{n \geq 0} (1 + q^{n+1/2})^2 = q^{1/24} \frac{\theta_3(q)}{\eta(q)} \tag{9.30}$$

где мы ввели обозначения

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad \theta_3(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2} \tag{9.31}$$

для функции Дедекинда и тэта-константы.

## 9.4 Вещественные фермионы

Полезно также иногда переписать действие (9.12) введя “вещественные фермионы”

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(z) + i\Psi_2(z)) \\
\psi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(z) - i\Psi_2(z)) \\
S &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1,2} \int_{\Sigma} d^2z \Psi_{\mu} \bar{\partial} \Psi_{\mu}
\end{aligned} \tag{9.32}$$

и ровно так же можно сделать в анти-голоморфном секторе. Эти вещественные фермионы являются прямым аналогом возникающих в действии для фермионной частицы, и с их помощью можно написать действие фермионной струны.

Голоморфные на уравнениях движения  $\partial\Psi = 0$  вещественные фермионы представляют собой конформную теорию с операторным разложением

$$\Psi(z)\Psi(z') = \frac{1}{z - z'} + O(z - z') \quad (9.33)$$

в которой нет тока единичной размерности и спина, а тензор энергии-импульса

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \Psi\partial\Psi(z) : = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (9.34)$$

$$L_n = \frac{1}{2} : \sum_{r+s=n} r\Psi_s\Psi_r : , \quad L_0 = \sum_{r>0} r\Psi_{-r}\Psi_r$$

или его компоненты, выраженные через гармоники

$$\Psi(z) = \sum_r \frac{\Psi_r}{z^{r+1/2}}, \quad [\Psi_r, \Psi_s]_+ = \delta_{s+r,0}, \quad \Psi_r|0\rangle = 0, \quad r > 0 \quad (9.35)$$

что приводит к “половинной статсумме” вещественного фермиона

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_\mu} q^{L_0} = \prod_{r>0} (1 + q^r) = \prod_{n \geq 0} (1 + q^{n+1/2}) \quad (9.36)$$

так как гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \otimes_{\mu=1,2} \mathcal{H}_\mu$ .

## 9.5 Немного статфизики и обобщения на другие тэта-константы

Докажем теперь важное тождество (тройного произведения Якоби)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}k^2} t^k = \prod_{n>0} (1 - q^n) \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}}t\right) \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}}t^{-1}\right) \quad (9.37)$$

представив его как производящую функцию для большого канонического ансамбля системы свободных фермионов с энергиями (9.26) или

$$e^{-E_r/T} = e^{-\frac{r}{T}} = q^r, \quad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad r > 0 \quad (9.38)$$

и химическим потенциалом  $t = e^{\mu/T}$ . Другими словами, состояния системы нумеруются полуцелыми числами, число частиц и античастиц в каждом состоянии  $n_r = 0, 1$  и  $\tilde{n}_s =$

0, 1 соответственно, а полное число частиц  $J_0 = N = \sum_r (n_r - \tilde{n}_r)$ . Таким образом, для статсуммы имеем

$$\begin{aligned} Z(q, t) &= \sum e^{-\frac{(E-\mu N)}{T}} = \text{Tr} (q^{L_0} t^{J_0}) = \sum_{\{n_r\}; \{\tilde{n}_r\}} q^{r(n_r + \tilde{n}_r)} t^{n_r - \tilde{n}_r} = \\ &= \prod_{r>0} \sum_{\{n_r\}} (q^r t)^{n_r} \prod_{r>0} \sum_{\{\tilde{n}_r\}} (q^r t^{-1})^{\tilde{n}_r} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t\right) \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \end{aligned} \quad (9.39)$$

С другой стороны совершенно очевидно, что та же статсумма большого канонического ансамбля может быть представлена в виде

$$Z(q, t) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(E-\mu N)}{T}} = \sum_{N \in \mathbb{Z}} t^N Z_N(q) \quad (9.40)$$

ряда по химпотенциалу с коэффициентами - статсуммами при фиксированном фермионном числе  $N = \sum_k (n_k - \tilde{n}_k)$ .

Как вычислить эту статсумму? На самом деле мы практически вернулись к “гамильтониану” (9.26) в терминах “чисел заполнения”

$$H = L_0 = \sum_{r>0} r \left( \tilde{\psi}_{-r} \psi_r + \psi_{-r} \tilde{\psi}_r \right) = \sum_{r>0} r \left( \psi_r^\dagger \psi_r + \tilde{\psi}_r^\dagger \tilde{\psi}_r \right) = \sum_{r>0} (r n_r + r \tilde{n}_r) \quad (9.41)$$

когда энергии системы определяются занятыми уровнями с  $n_r = 1$  и  $\tilde{n}_s = 1$  при каких-то  $r_1, \dots, r_l$  и  $s_1, \dots, s_{\tilde{l}}$ , так что

$$E = \sum_{j=1}^l r_j + \sum_{k=1}^{\tilde{l}} s_k, \quad N = l - \tilde{l} \quad (9.42)$$

Пусть сначала  $N = 0$ ,  $l = \tilde{l}$ , тогда

$$E = \sum_{j=1}^l (r_j + s_j) = \sum_{i=1}^{l'} k_i = M \geq 0, \quad N = 0 \quad (9.43)$$

где  $M$  и  $\{k_i\}$  - целые числа, а кроме того  $\{k_i\}$  - произвольные разбиения  $M$ <sup>3</sup>. Это означает, что число таких состояний эквивалентно числу состояний

$$|Y_{\mathbf{k}}\rangle = |k_1, \dots, k_{l'}\rangle = \alpha_{-k_1} \dots \alpha_{-k_{l'}} |0\rangle \quad (9.44)$$

<sup>3</sup>Заметим, что число  $l'$  ненулевых  $\{k_i\}$  вообще говоря отличается от числа  $l$  ненулевых чисел заполнения для фермионов, так как может оказаться равным числу строк в транспонированной диаграмме Юнга.



с энергией

$$L_0|Y_{\mathbf{k}}\rangle = \left( \sum_{j=1}^{l'} k_j \right) |Y_{\mathbf{k}}\rangle \quad (9.45)$$

в теории свободных бозонов или свободного скалярного поля в двумерии, где статсуммы мы уже вычисляли

$$Z_0(q) = \text{Tr} q^{L_0} = \frac{1}{\prod_{n>0} (1 - q^n)} \quad (9.46)$$

совпадает со статсуммой (точнее - ее голоморфной части) *свободных бозонов!* Если же  $|N| = |l - \tilde{l}| > 0$ , то ситуация меняется несильно - если скажем  $l > \tilde{l}$ , то оно представляет собой  $\psi_{N-1/2}^\dagger \dots \psi_{1/2}^\dagger |0\rangle$  с энергией

$$E_N = \sum_{j=1}^N \left( j - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} N^2 \quad (9.47)$$

над которым растет та же башня из “бозонов”. Таким образом

$$Z_N(q) = q^{N^2/2} Z_0(q) = \frac{q^{N^2/2}}{\prod_{n>0} (1 - q^n)} \quad (9.48)$$

причем результат естественно не зависит от знака  $N = l - \tilde{l}$ . Таким образом, для производящей функции большого канонического ансамбля получаем

$$\begin{aligned} Z(q, t) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + q^{n-\frac{1}{2}} t \right) \left( 1 + q^{n-\frac{1}{2}} t^{-1} \right) = \\ &= \sum_{N \in \mathbb{Z}} t^N Z_N(q) = \frac{\sum_{N \in \mathbb{Z}} t^N q^{N^2/2}}{\prod_{n>0} (1 - q^n)} \end{aligned} \quad (9.49)$$

что эквивалентно формуле тройного произведения Якоби. Правую часть этого равенства легко переписать, вводя *тэта-функцию* Якоби

$$Z(q, t) = \frac{\sum_{N \in \mathbb{Z}} t^N q^{N^2/2}}{\prod_{n>0} (1 - q^n)} = \frac{\Theta(t; q)}{\prod_{n>0} (1 - q^n)} \quad (9.50)$$

в мультипликативных переменных, т.е.  $t = e^{2\pi iz}$ ,  $q = e^{2\pi i\tau}$ .

Формула (9.49) имеет некоторые очевидные следствия. Например, можно ввести оператор фермионного числа  $F$  и фермионной четности  $(-)^F$ , такие, что

$$\begin{aligned} (-)^F |0\rangle &= |0\rangle, & (-)^F \psi_{-r} |0\rangle &= -\psi_{-r} |0\rangle, & (-)^F \tilde{\psi}_{-r} |0\rangle &= -\tilde{\psi}_{-r} |0\rangle, & \forall r \\ [(-)^F, \psi_r]_+ &= 0, & [(-)^F, \tilde{\psi}_r]_+ &= 0, & \forall r \end{aligned} \quad (9.51)$$

и т.д. <sup>4</sup> Тогда из (9.49) при  $t = -1$  очевидно, что

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(-)^F q^{L_0} = \prod_{r>0} (1 - q^r)^2 = \prod_{n \geq 0} (1 - q^{n+1/2})^2 = q^{1/24} \frac{\theta_4(q)}{\eta(q)} \quad (9.52)$$

где появляется другая тэта-константа

$$\theta_4(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-)^n q^{n^2/2} \quad (9.53)$$

Наконец, если мы вдруг допустим, что *целочисленные* фермионные гармоники тоже имеют смысл (забыв пока про проблему с квазипериодичностью или двузначностью и про нулевую моду), то формально заменив в (9.30) полуцелые индексы на целые, получим

$$\mathrm{Tr} q^{L_0} = \prod_{n>0} (1 + q^n)^2 = \frac{q^{-1/12} \theta_2(q)}{2\eta(q)} \quad (9.54)$$

где уже

$$\theta_2(q) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} q^{r^2/2} \quad (9.55)$$

Наконец самый интересный и неожиданный результат должен был бы получиться с четвертой известной тэта-константой  $\theta_1(q) = 0$ . С некоторой натяжкой его можно заработать переопределив сначала (9.54) на конечную константу и переписав в виде

$$\mathrm{Tr} q^{L_0} = \prod_{n \geq 0} (1 + q^n)^2 = \frac{2q^{-1/12} \theta_2(q)}{\eta(q)} \quad (9.56)$$

ну и тогда "почти очевидно, что"

$$\mathrm{Tr}(-)^F q^{L_0} = \prod_{n \geq 0} (1 - q^n)^2 = 0 \quad (9.57)$$

---

<sup>4</sup>Очевидно, что этот оператор совпадает  $F = J_0 = N$  по модулю 2, т.е.  $(-)^F = (-)^{J_0}$ .