Листок 07*. Срок сдачи 18 декабря 2015

Этот листок весь состоит из задач со звездочкой. По существу он представляет собой довольно подробный план нескольких последних лекций и тем самым может быть полезен при подготовке этого материала к экзамену. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

07.01.*

а) Докажите, что непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна на нем.

б) Докажите, что непрерывную функцию на отрезке можно представить как предел равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.

в) Обозначим множество всех ограниченных функций на отрезке $[a,b]$ через $\mathcal{F}([a,b])$. Определим расстояние между двумя функциями f и g из $\mathcal{F}([a,b])$ как $\rho(f,g) = \sup_{\alpha\in[a,b]} |f(\alpha)-g(\alpha)|$. Докажите, что выполнены все три аксиомы метрического пространства.

г) Докажите, что множество $C([a,b])$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ является замкнутым подмножеством в $\mathcal{F}([a,b])$.

д) Покажите, что множество ступенчатых функций всюду плотно в множестве всех кусочно-непрерывных функций на отрезке. (Функция на отрезке называется кусочно-непрерывной, если она имеет конечное число точек разрыва, причем все они первого рода, т.е. в этих точках у функции существуют односторонние пределы.)

е) Пусть α фиксированная точка отрезка $[a,b]$. Рассмотрим отображение $\varphi_\alpha : \mathcal{F}([a,b]) \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой функции $f \in \mathcal{F}([a,b])$ ее значение в точке α, т.е. $\varphi_\alpha(f) = f(\alpha)$. Докажите, что отображение φ_α непрерывно.

ж) Докажите, что если последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}([a,b])$ равномерно сходится к некоторой функции f, то для любой точки $\alpha \in [a,b]$ числовая последовательность $f_n(\alpha)$ имеет пределом число $f(\alpha)$.

з) Приведите пример такой последовательности непрерывных функций $f_n \in [a,b]$, которая не является равномерно сходящейся, но для любого $\alpha \in [a,b]$ числовая последовательность $f_n(\alpha)$ имеет предел.

и) Приведите пример такой последовательности непрерывных функций $f_n \in [a,b]$, и разрывной функции f на отрезке $[a,b]$, что для любого $\alpha \in [a,b]$ числовая последовательность $f_n(\alpha)$ имеет пределом $f(\alpha)$.

07.02.* Предположим, что для каждого отрезка $[c,d] \subset [a,b]$ зафиксировано некоторое множество функций $\mathcal{G}([c,d])$ на нем, содержащее константы и являющееся линейным подпространством в $\mathcal{F}([c,d])$, так что если отрезок $[c',d'] \subset [c,d]$, то ограничение любой функции из $\mathcal{G}([c,d])$ на отрезок $[c',d']$ содержится в $\mathcal{G}([c',d'])$. Предположим, что на каждом $\mathcal{G}([c,d])$ определен функционал $S_{[c,d]} : \mathcal{G}([c,d]) \to \mathbb{R}$, обладающий следующими четырьмя свойствами:

1) Отображение $S_{[c,d]}$ линейно, т.е. $S_{[c,d]}(f+g) = S_{[c,d]}(f) + S_{[c,d]}(g)$ и $S_{[c,d]}(\lambda f) = \lambda S_{[c,d]}(f)$.

2) $S_{[c,d]}$ аддитивен, т.е. если $p \in (c,d)$, $f \in \mathcal{G}([c,d])$, то $S_{[c,d]}(f) = S_{[c,p]}(f) + S_{[p,d]}(f)$.

3) $S_{[c,d]}$ монотонен, т.е. если $f \le g$ на $[c,d]$, то $S_{[c,d]}(f) \le S_{[c,d]}(g)$.

4) $S_{[c,d]}(1) = d - c$. .

Заметим, что в силу линейности условие 3) равносильно условию

3') если $f \ge 0$ на $[c,d]$, то $S_{[c,d]}(f) \ge 0$

В этой задаче обсуждаются способы построить такой функционал $S_{[c,d]}$ и доказать его единственность при разных выборах множества функций $\mathcal{G}([c,d])$.

а) Предположим, что множество функций $\mathcal{G}([c,d])$ является множеством всех ступенчатых функций на $[c,d]$. Покажите, что в этом случае удовлетворяющий условиям 1)-4) функционал $S_{[c,d]}$ существует и единственен.

б) Пусть $\mathcal{G}([c,d])$ представляет собой множество непрерывных функций на отрезке $[c,d]$, обладающих первообразной. (В задаче 07.03 мы докажем, что на самом деле любая непрерывная функция на отрезке обладает первообразной.) Докажите, что функционал $S_{[c,d]}(f) = F(d) - F(c)$ удовлетворяет условиям 1)-4). (F — какая-нибудь первообразная функции f.)

в) (Теорема Ньютона-Лейбница) Пусть f какая-нибудь непрерывная функция из $\mathcal{G}([a,b])$. Для каждого $t \in [a,b]$ определено число $S_{[a,t]}(f)$. Докажите, что функция $F(t) = S_{[a,t]}(f)$ является первообразной для f.

г) Докажите, что если последовательность функций $f_n \in \mathcal{G}([a,b])$ равномерно сходится к функции $f \in \mathcal{G}([a,b])$, то предел числовой последовательности $S_{[a,b]}(f_n)$ равен числу $S_{[a,b]}(f)$. Покажите, что это есть просто переформулировка того что функционал $S_{[a,b]}$ непрерывен на $\mathcal{G}([a,b])$.

д) Предположим, что множество функций $\mathcal{G}([a,b])$ содержит все ступенчатые функции на $\mathcal{G}([a,b])$, причем множество ступенчатых функций всюду плотно в нем. Покажите, что если функционала $S_{[c,d]}$, удовлетворяющий условиям 1)-4) существует, то он единственен.

е) Пусть $\mathcal{G}([a,b])$ представляет собой множество таких кусочно-непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, которые обладают следующим свойством: если кусочно-непрерывная функция f непрерывна на некотором интервале $(c,d) \subset [a,b]$, то функция, полученная из f переопределением в точках c и d по непрерывности (т.е. меняем в этих двух точках значения так: $f(c) := \lim_{x\to c+} f(x)$, $f(d) := \lim_{x\to d-} f(x)$), обладает первообразной на $[c,d]$. Придумайте, как распространить определение функционала $S_{[c,d]}$ из задачи б) на такие функции и докажите, что получившийся функционал удовлетворяет условиям 1)-4).

07.03.* Каждая непрерывная функция на отрезке обладает первообразной. Пусть f непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[a,b]$ точками $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ ($\alpha_0 = a$, $\alpha_n = b$) на отрезки $\Delta_i = [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Выражения

$$L_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \min_{t\in\Delta_i} f(t) \quad \text{и} \quad M_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \max_{t\in\Delta_i} f(t)$$

называются, соответственно, нижней и верхней интегральной суммами.

а) Докажите, что при измельчении разбиения (т.е. добавлении нескольких новых точек деления при сохранении всех старых) нижняя интегральная сумма не уменьшится, а верхняя интегральная сумма не увеличится.

б) Докажите, что для двух разных разбиений $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ и $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_k$

$$L_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} \le M_{\beta_0,\ldots,\beta_k}.$$

в) Докажите, что существует единственное действительное число s такое, что для любых разбиений

$$L_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} \le s \le M_{\beta_0,\ldots,\beta_k}.$$

Тогда для функции $f \in C([a,b])$ положим $S_{[a,b]}(f) = s$.

г) Докажите, что определенный в п. в) функционал линеен. (Подсказка: $\min(f+g) \ge \min(f) + \min(g)$.)

д) Докажите, что определенный в п. в) функционал аддитивен.

е) Докажите, что определенный в п. в) функционал монотонен.

ж) Докажите, что каждая непрерывная функция на отрезке обладает первообразной.