

# Категории и универсальная алгебра (2015)

## Лекция 5

### Пределы диаграмм

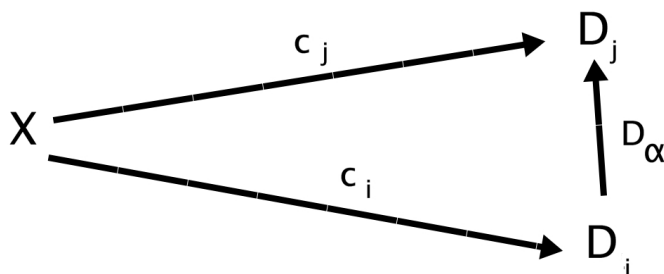
Определение Пусть  $\mathcal{F}$  - малая предкатегория,  $\mathcal{C}$  - категория. Предфунктор  $\mathbf{D}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$  называется *диаграммой в  $\mathcal{C}$  со схемой  $\mathcal{F}$* .

Обозначения:  $D_j := \mathbf{D}(j)$ ,  $D_\alpha := \mathbf{D}(\alpha)$  для  $j \in \text{Ob } \mathcal{F}$ ,  $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{F}$ .

*Конусом* над диаграммой  $\mathbf{D}$  называется пара вида  $(X, (c_j)_{j \in \text{Ob } \mathcal{F}})$ , где  $X$  - объект из  $\mathcal{C}$ ,

$c_j: X \rightarrow D_j$ , в которой все стрелки  $c_j$  согласованы с  $\mathbf{D}$ , т.е.

для каждой стрелки  $\alpha: i \rightarrow j$  из  $\mathcal{F}$  коммутативна диаграмма

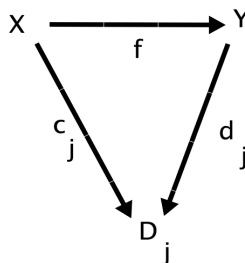


В дальнейшем пишем  $j \in \mathcal{F}$  вместо  $j \in \text{Ob } \mathcal{F}$ .

Лемма 5.0 Конусы над  $\mathbf{D}$  образуют категорию, стрелки в которой задаются следующим образом:

если  $A = (X, (c_j)_{j \in \mathcal{F}})$ ,  $B = (Y, (d_j)_{j \in \mathcal{F}})$  - конусы, то стрелка из  $A$  в  $B$  - это тройка

$(f, A, B)$ , где  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , причем коммутативны все диаграммы



Категория конусов над  $\mathbf{D}$  обозначается  $\text{Con}_{\mathcal{C}} \mathbf{D}$ .

Определение *Пределом* диаграммы  $\mathbf{D}$  называется финальный объект категории  $\text{Con}_{\mathcal{C}} \mathbf{D}$ .

Такой объект единствен, с точностью до изоморфизма; обозначение:  $(\lim_{\leftarrow} \mathbf{D}, (p_j)_{j \in J})$ .

Определение предела означает, что всякий конус над  $\mathbf{D}$  единственным образом пропускается через предел.

Формально, предел – это конус, но пределом также называется вершина этого конуса.

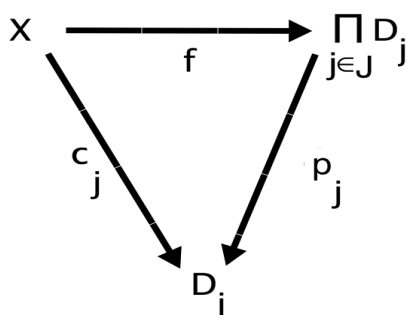
Пример 1 Рассмотрим пустую диаграмму в  $\mathcal{C}$ , т.е. диаграмму с пустой схемой. Категорию конусов над ней можно отождествить с  $\mathcal{C}$ . Пределом является финальный объект в  $\mathcal{C}$ .

Пример 2 Рассмотрим диаграмму из одного объекта  $A$  (т.е. ее схема  $\{0\}$  без стрелок;  $D_0=A$ ). Ее предел – это стрелка  $1_A: A \rightarrow A$ .

Пример 3 Обобщение примера 2. Рассмотрим дискретную схему  $\mathcal{J}$ , т.е.  $\mathcal{J}$  – это множество объектов без стрелок (и можно его записывать как  $J$ ). Диаграмма  $\mathbf{D}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  – это семейство объектов  $(D_j)_{j \in J}$  в  $\mathcal{C}$ . Ее предел называется *произведением* данного семейства; обозначение  $(\prod_{j \in J} D_j, (p_j)_{j \in J})$ .

Если  $J=\{1, \dots, n\}$  – конечное множество, то пишут  $D_1 \times \dots \times D_n$ .

По определению предела, для любого конуса над нашей диаграммой, т.е. семейства стрелок  $c_j: X \rightarrow D_j$  (где  $j \in J$ ), существует единственная  $f$ , для которой коммутативны все треугольники



Эта  $f$  обозначается через  $\langle c_j \rangle_{j \in J}$  (или  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle$ , когда  $J=\{1, \dots, n\}$ ).

Теорема 5.1 В SET существует произведение любого семейства объектов:

$\prod_{j \in J} D_j$  – это множество всех функций выбора для данного семейства, т.е. таких

функций  $\varphi: J \rightarrow \bigcup_{j \in J} D_j$ , что для всех  $j \in J$ ,  $\varphi(j) \in D_j$ ;

$$p_j(\varphi) = \varphi(j).$$

Интуитивно,  $\varphi$  – это “последовательность из  $J$  членов”;  $p_j$  – это ее  $j$ -й член.

## Копределы

Определение Пусть  $\mathbf{D}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  - диаграмма в  $\mathcal{C}$  со схемой  $\mathcal{J}$ . Тогда в  $\mathcal{C}^\circ$  имеется

двойственная диаграмма  $\mathbf{D}^\circ: \mathcal{J}^\circ \rightarrow \mathcal{C}^\circ$ , где

$$\mathbf{D}^\circ(j) := \mathbf{D}(j), \quad \mathbf{D}^\circ(\alpha) := \mathbf{D}(\alpha).$$

Предел диаграммы  $\mathbf{D}^\circ$  называется *копределом* диаграммы  $\mathbf{D}$  и обозначается

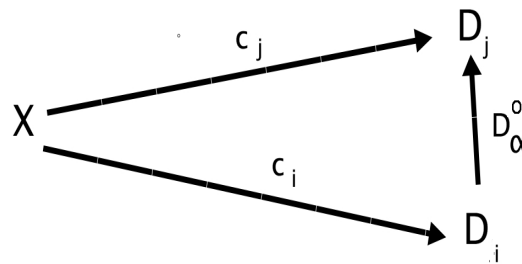
$$(\text{Lim}_{\rightarrow} \mathbf{D}, (b_j)_{j \in \mathcal{J}}).$$

Таким образом, копредел - это финальный объект категории конусов над  $\mathbf{D}^\circ$ , т.е.

$\text{Con}_{\mathcal{C}^\circ} \mathbf{D}^\circ$ . Каждый такой конус есть

пара вида  $(X, (c_j)_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}})$ , где  $X$  – объект из  $\mathcal{C}$ ,  $c_j: X \rightarrow D_j$  - стрелки в  $\mathcal{C}$ , а условие

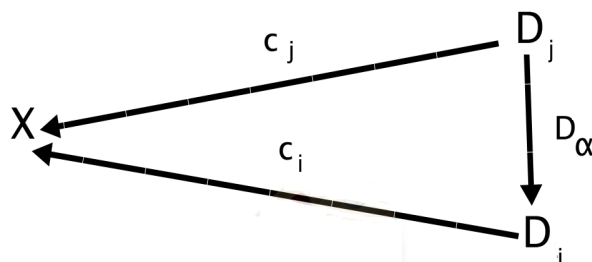
согласования с точки зрения категорий  $\mathcal{J}^\circ, \mathcal{C}^\circ$  выглядит следующим образом:



(где  $\alpha: i \rightarrow j$  в  $\mathcal{J}^\circ$ ).

Тогда с точки зрения  $\mathcal{J}, \mathcal{C}$  получается *коконус над  $\mathbf{D}$* , т.е. пара  $(X, (c_j)_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}})$ , где

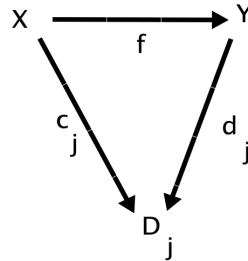
$c_j: D_j \rightarrow X$ , а условие согласования имеет вид



(где  $\alpha: j \rightarrow i$  в  $\mathcal{J}$ ).

Морфизм в  $\text{Con}_{\mathcal{C}}^{\circ} \mathbf{D}$  из  $A = (X, (c_j)_{j \in \mathcal{J}})$  в  $B = (Y, (d_j)_{j \in \mathcal{J}})$  – это

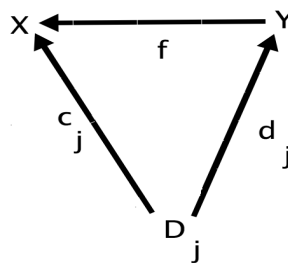
$(f, A, B)$ , где  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  и коммутативны диаграммы в  $\mathcal{C}^{\circ}$



Категория коконусов над  $\mathbf{D}$  (обозначение:  $\text{Con}_{\mathcal{C}}^{\circ} \mathbf{D}$ ) – это двойственная к  $\text{Con}_{\mathcal{C}}^{\circ} \mathbf{D}$ .

Таким образом, морфизм в  $\text{Con}_{\mathcal{C}}^{\circ} \mathbf{D}$  из  $B = (Y, (d_j)_{j \in \mathcal{J}})$  в  $A = (X, (c_j)_{j \in \mathcal{J}})$  – это

$(f, A, B)$ , где  $f \in \mathcal{C}(Y, X)$  и коммутативны диаграммы в  $\mathcal{C}$



Соответственно, копредел  $\mathbf{D}$  – это начальный объект категории  $\text{Con}_{\mathcal{C}}^{\circ} \mathbf{D}$ .

Пример 4 Рассмотрим пустую диаграмму в  $\mathcal{C}$ , т.е. диаграмму с пустой схемой. Категорию коконусов над ней можно отождествить с  $\mathcal{C}$ . Копределом является начальный объект в  $\mathcal{C}$ .

Пример 5 Как в примере 3, рассмотрим диаграмму с дискретной схемой, т.е. семейство объектов  $(D_j)_{j \in J}$  в  $\mathcal{C}$ . Ее копредел называется *копроизведением* (или *суммой*) данного семейства; обозначение  $(\coprod_{j \in J} D_j, (b_j)_{j \in J})$ .

Если  $J = \{1, \dots, n\}$  – конечное множество, то пишут  $D_1 \coprod \dots \coprod D_n$  (или  $D_1 + \dots + D_n$ ).

Теорема 5.2 В SET существует сумма любого семейства объектов:

$$\coprod_{j \in J} D_j = \bigcup_{j \in J} (D_j \times \{j\}), b_j(x) = (x, j).$$

Пример 6 Рассмотрим диаграмму из одной стрелки  $\alpha: A \rightarrow B$ . Ее предел – это  $(A, 1_A, \alpha)$ .

Пример 7 Рассмотрим диаграмму

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} B$$

Ее предел называется *уравнителем* стрелок  $\alpha, \beta$ .

Конус над этой диаграммой состоит из 2 стрелок  $f: X \rightarrow A, g: X \rightarrow B$ , где

$$f \cdot \alpha = f \cdot \beta = g:$$

$$X \xrightarrow{f} A \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} B$$

Стрелка  $g$  не указана, т.к. она однозначно восстанавливается.

Таким образом, уравнитель задается стрелкой  $e: E \rightarrow A$ , для которой коммутативна диаграмма

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} B$$

причем любая другая стрелка  $e': E' \rightarrow A$ , такая что  $e' \cdot \alpha = e' \cdot \beta$ , однозначно пропускается через  $e$ :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & A \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} B \\ \uparrow \text{---} & \nearrow e' & \\ E' & & \end{array}$$

Очевидно, что если  $\alpha = \beta$ , то уравнителем является стрелка  $1_A: A \rightarrow A$  (как в примере 6).

Теорема 5.3 В SET существует уравнитель для любой пары стрелок (с общим началом и концом).

Для доказательства надо взять множество  $E = \{x \mid \alpha(x) = \beta(x)\}$  и отображение включения

$e: E \rightarrow A$ .