Категории и универсальная алгебра (2015)

Лекция 5

Пределы диаграмм

Определение Пусть $\mathcal{J}$ - малая предкатегория, $\mathcal{C}$ - категория. Предфунктор $\mathbf{D}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ называется *диаграммой в $\mathcal{C}$ со схемой $\mathcal{J}$*.

Обозначения: $D_j := \mathbf{D}(j)$, $D_\alpha := \mathbf{D}(\alpha)$ для $j \in \mathrm{Ob}\mathcal{J}$, $\alpha \in \mathrm{Mor}\mathcal{J}$.

Конусом над диаграммой $\mathbf{D}$ называется пара вида $(X, (c_j)_{j\in \mathrm{Ob}\mathcal{J}})$, где X – объект из $\mathcal{C}$,

$c_j : X \to D_j$, в которой все стрелки c_j согласованы с $\mathbf{D}$, т.е.

для каждой стрелки $\alpha\colon i \to j$ из $\mathcal{J}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & D_j \\ X \arrow[ur, "c_j"] \arrow[dr, "c_i"'] & \\ & D_i \arrow[uu, "D_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

В дальнейшем пишем $j \in \mathcal{J}$ вместо $j \in \mathrm{Ob}\mathcal{J}$.

Лемма 5.0 Конусы над $\mathbf{D}$ образуют категорию, стрелки в которой задаются следующим образом:

если $A= (X, (c_j)_{j\in \mathcal{J}})$, $B=(Y, (d_j)_{j\in \mathcal{J}})$ - конусы, то стрелка из A в B – это тройка (f, A, B), где $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, причем коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c_j"'] & & Y \arrow[dl, "d_j"] \\ & D_j & \end{tikzcd}$$

Категория конусов над $\mathbf{D}$ обозначается $\mathrm{Con}_{\mathcal{C}}\mathbf{D}$.

Определение *Пределом* диаграммы $\mathbf{D}$ называется финальный объект категории $\mathrm{Con}_{\mathcal{C}}\mathbf{D}$.

Такой объект единствен, с точностью до изоморфизма; обозначение: ($\lim\limits_{\leftarrow}$ $\mathbf{D}$, $(p_j)_{j\in \mathscr{J}}$**).**

Определение предела означает, что всякий конус над $\mathbf{D}$ единственным образом пропускается через предел.

Формально, предел – это конус, но пределом также называется вершина этого конуса.

<u>Пример 1</u> Рассмотрим пустую диаграмму в $\mathscr{C}$, т.е. диаграмму с пустой схемой. Категорию конусов над ней можно отождествить с $\mathscr{C}$. Пределом является финальный объект в $\mathscr{C}$.

<u>Пример 2</u> Рассмотрим диаграмму из одного объекта A (т.е. ее схема {0} без стрелок; D_0=A). Ее предел – это стрелка 1_A: A $\rightarrow$ A.

<u>Пример 3</u> Обобщение примера 2. Рассмотрим дискретную схему $\mathscr{J}$, т.е. $\mathscr{J}$ - это множество объектов без стрелок (и можно его записывать как J). Диаграмма $\mathbf{D}$: $\mathscr{J} \rightarrow \mathscr{C}$ **–** это семейство объектов $(D_j)_{j\in J}$ в $\mathscr{C}$. Ее предел называется *произведением* данного семейства*;* обозначение ($\prod\limits_{j\in J} D_j$, $(p_j)_{j\in J}$).

Если J={1,...,n} – конечное множество, то пишут $D_1 \times ... \times D_n$.

По определению предела, для любого конуса над нашей диаграммой, т.е. семейства стрелок c_j: X $\rightarrow$ D_j (где $j\in J$), существует единственная f, для которой коммутативны все треугольники

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c_j"'] & & \prod\limits_{j\in J} D_j \arrow[dl, "p_j"] \\
& D_j &
\end{tikzcd}$$

Эта f обозначается через $<c_j>_{j\in J}$ (или $<c_1,...,c_n>$, когда J={1,...,n}).

<u>Теорема 5.1</u> В SET существует произведение любого семейства объектов:

$\prod\limits_{j\in J} D_j$ - это множество всех функций выбора для данного семейства, т.е. таких функций φ: J $\rightarrow \bigcup_{j\in J} D_j$, что для всех $j \in J$, $\varphi(j) \in D_j$;

$p_j(\varphi) = \varphi(j)$.

Интуитивно, φ – это “последовательность из J членов”; p_j – это ее j-й член.

Копределы

<u>Определение</u> Пусть $\mathbf{D}\colon \mathscr{J} \to \mathscr{C}$ - диаграмма в $\mathscr{C}$ со схемой $\mathscr{J}$. Тогда в $\mathscr{C}^{\circ}$ имеется *двойственная диаграмма* $\mathbf{D}^{\circ}\colon \mathscr{J}^{\circ} \to \mathscr{C}^{\circ}$, где

$$\mathbf{D}^{\circ}(j) := \mathbf{D}(j)\ ,\ \mathbf{D}^{\circ}(\alpha) := \mathbf{D}(\alpha).$$

Предел диаграммы $\mathbf{D}^{\circ}$ называется *копределом диаграммы* $\mathbf{D}$ и обозначается

$(\mathrm{Lim}_{\to}\ \mathbf{D}, (b_j)_{j\in \mathscr{J}})$.

Таким образом, копредел – это финальный объект категории конусов над $\mathbf{D}^{\circ}$, т.е.

$\mathrm{Con}_{\mathscr{C}^{\circ}}\ \mathbf{D}^{\circ}$. Каждый такой конус есть

пара вида $(X, (c_j)_{j\in \mathrm{Ob}\mathscr{J}})$, где X – объект из $\mathscr{C}$, $c_j : X \to D_j$ - стрелки в $\mathscr{C}^{\circ}$, а условие согласования с точки зрения категорий $\mathscr{J}^{\circ}$, $\mathscr{C}^{\circ}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & & D_j \\
X \arrow[urr, "c_j"] \arrow[drr, "c_i"'] & & \\
 & & D_i \arrow[uu, "D^{\circ}_{\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

(где α: $i \to j$ в $\mathscr{J}^{\circ}$).

Тогда с точки зрения $\mathscr{J}$, $\mathscr{C}$ получается *коконус над* $\mathbf{D}$, т.е. пара $(X, (c_j)_{j\in \mathrm{Ob}\mathscr{J}})$, где $c_j : D_j \to X$, а условие согласования имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & & D_j \arrow[dll, "c_j"'] \arrow[dd, "D_{\alpha}"] \\
X & & \\
 & & D_i \arrow[ull, "c_i"]
\end{tikzcd}$$

(где $\alpha: j \to i$ в $\mathscr{J}$).

Морфизм в $\mathrm{Con}_{\mathscr{C}^\circ} \mathbf{D}^\circ$ из $A = (X, (c_j)_{j \in \mathscr{J}})$ в $B = (Y, (d_j)_{j \in \mathscr{J}})$ – это

(f, A, B), где $f \in \mathscr{C}^\circ(X,Y)$ и коммутативны диаграммы в $\mathscr{C}^\circ$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c_j"'] & & Y \arrow[dl, "d_j"] \\
& D_j &
\end{tikzcd}$$

Категория коконусов над $\mathbf{D}$ (обозначение: $\mathrm{Con}^{\circ}_{\mathscr{C}} \mathbf{D}$) - это двойственная к $\mathrm{Con}_{\mathscr{C}^\circ} \mathbf{D}^\circ$.

Таким образом, морфизм в $\mathrm{Con}^{\circ}_{\mathscr{C}} \mathbf{D}$ из $B = (Y, (d_j)_{j \in \mathscr{J}})$ в $A = (X, (c_j)_{j \in \mathscr{J}})$ – это

(f, A, B), где $f \in \mathscr{C}(Y,X)$ и коммутативны диаграммы в $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
X & & Y \arrow[ll, "f"'] \\
& D_j \arrow[ul, "c_j"] \arrow[ur, "d_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Соответственно, копредел $\mathbf{D}$ – это начальный объект категории $\mathrm{Con}^{\circ}_{\mathscr{C}} \mathbf{D}$.

<u>Пример 4</u> Рассмотрим пустую диаграмму в $\mathscr{C}$, т.е. диаграмму с пустой схемой. Категорию коконусов над ней можно отождествить с $\mathscr{C}$. Копределом является начальный объект в $\mathscr{C}$.

<u>Пример 5</u> Как в примере 3, рассмотрим диаграмму с дискретной схемой, т.е. семейство объектов $(D_j)_{j \in J}$ в $\mathscr{C}$. Ее копредел называется *копроизведением* (или *суммой*) данного семейства*;* обозначение ($\coprod_{j \in J} D_j$, $(b_j)_{j \in J}$).

Если $J = \{1,...,n\}$ – конечное множество, то пишут $D_1 \sqcup ... \sqcup D_n$ (или $D_1 + ... + D_n$).

Теорема 5.2 В SET существует сумма любого семейства объектов:

$$\coprod_{j \in J} D_j = \bigcup_{j\in J} (D_j \times \{j\}),\ b_j(x) = (x,j).$$

Пример 6 Рассмотрим диаграмму из одной стрелки $\alpha: A \to B$. Ее предел – это $(A, 1_A, \alpha)$.

Пример 7 Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

Ее предел называется *уравнителем* стрелок α, β.

Конус над этой диаграммой состоит из 2 стрелок $f: X \to A$, $g: X \to B$, где

$f \cdot \alpha = f \cdot \beta = g$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

Стрелка g не указана, т.к. она однозначно восстанавливается.

Таким образом, уравнитель задается стрелкой $e: E \to A$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

причем любая другая стрелка $e': E' \to A$, такая что $e' \cdot \alpha = e' \cdot \beta$, однозначно пропускается через e:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \\ E' \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Очевидно, что если $\alpha = \beta$, то уравнителем является стрелка $1_A: A \to A$ (как в примере 6).

Теорема 5.3 В SET существует уравнитель для любой пары стрелок (с общим началом и концом).

Для доказательства надо взять множество $E = \{x \mid \alpha(x) = \beta(x)\}$ и отображение включения

$e\colon E \to A$.